Exercice 1.
On considère l'équation $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
▶1. Démontrer que si le couple $(x; y)$ est solution de l'équation, alors $x^2 \equiv 2y^2\ [mod\ 5]$
▶2. Soient x et y des entiers relatifs. Compléter les deux tableaux suivants :

Si $x \equiv \cdots\ [mod\ 5]$	0	1	2	3	4
alors $x^2 \equiv \cdots\ [mod\ 5]$					

Si $y \equiv \cdots\ [mod\ 5]$	0	1	2	3	4
alors $y^2 \equiv \cdots\ [mod\ 5]$					
donc $2y^2 \equiv \cdots\ [mod\ 5]$					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
▶3. En déduire que si le couple $(x; y)$ est solution de l'équation, alors x et y sont des multiples de 5.

Exercice 2.
On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

▶1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

▶2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n\ [mod\ 4]$.

En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2\ [mod\ 4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [mod\ 4]$.

▶3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28\ [mod\ 100]$.

▶4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.