Exercice 1.

1.

Soit un couple $(x; y)$ solution de l'équation $11x^2 - 7y^2 = 5$
alors, $11x^2 - 7y^2 = 5 \equiv 0\ [mod\ 5]$
d'où $11x^2 \equiv 7y^2\ [mod\ 5]$
De plus, $11 \equiv 1\ [mod\ 5]$ et $7 \equiv 2\ [mod\ 5]$
Soit $11x^2 \equiv x^2\ [mod\ 5]$ et $7y^2 \equiv 2y^2\ [mod\ 5]$
Donc $x^2 \equiv 2y^2\ [mod\ 5]$

2.

Si $x \equiv \cdots\ [mod\ 5]$	0	1	2	3	4
alors $x^2 \equiv \cdots\ [mod\ 5]$	0	1	4	4	1

Si $y \equiv \cdots\ [mod\ 5]$	0	1	2	3	4
alors $y^2 \equiv \cdots\ [mod\ 5]$	0	1	4	4	1
donc $2y^2 \equiv \cdots\ [mod\ 5]$	0	2	3	3	2

Si $x^2 \equiv 2y^2\ [mod\ 5]$ alors la seule possibilité est que $x^2 \equiv 2y^2 \equiv 0\ [mod\ 5]$
Le reste de la division euclidienne de x^2 par 5 est 0 ainsi que le reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5.

3.

On en déduit que si le couple $(x; y)$ est solution de l'équation $11x^2 - 7y^2 = 5$, alors 5 divise x^2 ainsi que $2y^2$. On a alors $x^2 \equiv 0\ [mod\ 5]$ et $2y^2 \equiv 0\ [mod\ 5]$, d'après la question précédente , on en déduit que $x \equiv 0\ [mod\ 5]$ et $y \equiv 0\ [mod\ 5]$,
donc x et y sont des multiples de 5.

Exercice 2.

1.

Pour $n = 0, u_1 = 5u_0 - 6 = 5\times 14 - 6 = 64$
Pour $n = 1, u_2 = 5u_1 - 6 = 5\times 64 - 6 = 314$
Pour $n = 2, u_3 = 5u_2 - 6 = 5\times 314 - 6 = 1564$
Pour $n = 3, u_4 = 5u_3 - 6 = 5\times 1564 - 6 = 7814$
Les deux derniers chiffres de u_n alternent entre 64 lorsque n est impair et 14 lorsque n est pair.

2.

Pour tout entier naturel n,
$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 30 - 6 = 25u_n - 36$
or $25 \equiv 1\ [mod\ 4]$ donc $25u_n \equiv u_n\ [mod\ 4]$ et $36 \equiv 0\ [mod\ 4]$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} \equiv u_n\ [mod\ 4]$$

Posons $\mathcal{P}(k)$: $u_{2k} \equiv 2\ [mod\ 4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [mod\ 4]$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation pour $k = 0$:

$$u_{2\times 0} = u_0 = 14 \equiv 2\ [mod\ 4] \text{ et } u_{2\times 0+1} = u_1 = 64 \equiv 0\ [mod\ 4]$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie : $u_{2k} \equiv 2\ [mod\ 4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [mod\ 4]$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$u_{2(k+1)} = u_{2k+2} \equiv u_{2k}\ [mod\ 4] \text{ d'après question 2.}$$

donc $u_{2(k+1)} \equiv 2\ [mod\ 4]$

de plus $u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3} \equiv u_{2k+1}\ [mod\ 4]$ d'après question 2.

donc $u_{2(k+1)+1} \equiv 0\ [mod\ 4]$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie

Par conséquent $u_{2k} \equiv 2\ [mod\ 4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [mod\ 4]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3.

Posons $\mathcal{P}(n)$: $2u_n = 5^{n+2} + 3$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation pour $n = 0$:

$$5^{0+2} + 3 = 5^2 + 3 = 25 + 3 = 28 = 2\times 14 = 2\times u_0$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $2u_n = 5^{n+2} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6)$$

$$2u_{n+1} = 10u_n - 12$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Par conséquent $2u_n = 5^{n+2} + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

		Posons $\mathcal{P}(n)$: $5^{n+2} \equiv 25\ [mod\ 100]$ Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Initialisation pour $n = 0$: $5^{0+2} = 25 \equiv 25\ [mod\ 100]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $5^{n+2} \equiv 25\ [mod\ 100]$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $5^{n+1+2} = 5\times5^{n+2} \equiv 5\times25\ [mod\ 100] \equiv 125\ [mod\ 100] \equiv 5\times25\ [mod\ 100]$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $5^{n+2} \equiv 25\ [mod\ 100]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $2u_n = 5^{n+2} + 3 \equiv 28\ [mod\ 100]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
	4.	Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 28 + 100k \Leftrightarrow u_n = 14 + 50k$ où $k \in \mathbb{Z}$ Il y a alors deux cas possibles : Soit k est pair, c'est-à-dire que $k = 2p$ où $p \in \mathbb{Z}$ Et donc $u_n = 14 + 50\times2p = 14 + 100p \equiv 14\ [mod\ 100]$ Dans ce cas, les deux derniers chiffres de u_n sont 14. Soit k est impair, c'est-à-dire que $k = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{Z}$ Et donc $u_n = 14 + 50\times(2p + 1) = 14 + 100p + 50 \equiv 64\ [mod\ 100]$ Dans ce cas, les deux derniers chiffres de u_n sont 64. De plus, $u_{2k} \equiv 2\ [mod\ 4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [mod\ 4]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ Donc $u_{2k} = 2 + 4q$ et $u_{2k+1} = 4q'$ où $q, q' \in \mathbb{Z}$ Donc $25\times u_{2k} \equiv 50\ [mod\ 100]$ et $25\times u_{2k+1} \equiv 0\ [mod\ 100]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ Or $25\times14 \equiv 50\ [mod\ 100]$ et $25\times64 \equiv 0\ [mod\ 100]$ On en déduit que $u_{2k} \equiv 14\ [mod\ 100]$ et $u_{2k+1} \equiv 64\ [mod\ 100]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$