

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments  $A$  et  $B$ .

La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi. On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments.

On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment  $A$  avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment  $B$  après fermeture de la porte,
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment  $B$  avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment  $A$  après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments  $A$  et  $B$  contiennent le même effectif de souris.

On pose  $a_0 = 0,5$  et  $b_0 = 0,5$ .

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $a_n$  et  $b_n$  les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments  $A$  et  $B$  au bout de  $n$  jours, après fermeture de la porte. On désigne par  $U_n$  la matrice  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ .

► 1. Soit  $n$  un entier naturel.

a. Justifier que  $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$ .

b. Exprimer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

c. En déduire que  $U_{n+1} = MU_n$  où  $M$  est une matrice carrée que l'on précisera.

d. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $U_n = M^n U_0$ .

e. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments  $A$  et  $B$  au bout de 3 jours.

► 2. Soit la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

a. Calculer à la main  $P^2$ . En déduire que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

b. Vérifier que  $P^{-1}MP$  est une matrice diagonale  $D$  que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $M^n = PD^nP^{-1}$ . En déduire  $M^n$ .

► 3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments  $A$  et  $B$  de la cage ?