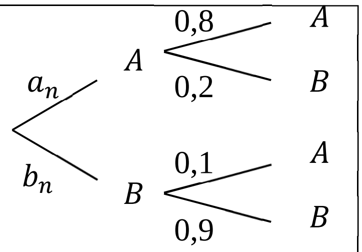
	$a_1 = 0{,}5\times0{,}8 + 0{,}5\times0{,}1 = 0{,}45$ et donc $b_1 = 0{,}55$. Donc $U_1 = \begin{pmatrix}0{,}45\\0{,}55\end{pmatrix}$	
	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n - 0{,}2a_n + 0{,}1b_n = 0{,}8a_n + 0{,}1b_n$ $b_{n+1} = b_n + 0{,}2a_n - 0{,}1b_n = 0{,}2a_n + 0{,}9b_n$	
	Soit $M = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}1\\0{,}2 & 0{,}9\end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}1\\0{,}2 & 0{,}9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix} = U_{n+1}$	
1	Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $U_n = M^nU_0$, démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Initialisation : pour $n = 1, U_1 = \begin{pmatrix}0{,}45\\0{,}55\end{pmatrix}$ $M^1U_0 = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}1\\0{,}2 & 0{,}9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}45\\0{,}55\end{pmatrix} = U_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie $i.e. U_n = M^nU_0$ $U_{n+1} = MU_n = M\times M^nU_0 = M^{n+1}\,U_O$ Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a donc démontré que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est à dire $U_n = M^nU_0$.	
	$U_3 = M^3U_0 = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}1\\0{,}2 & 0{,}9\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}562 & 0{,}219\\0{,}438 & 0{,}781\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}3905\\0{,}6095\end{pmatrix}$ La répartition au bout de 3 jours est : 0,3905 dans le compartiment A et 0,6095 dans le compartiment B.	
	$P^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2 & 1-1\\2-2 & 2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{3}P\,P = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}P$	
	$P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}1\\0{,}2 & 0{,}9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}7\end{pmatrix} = D$	
2	Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $M^n = PD^nP^{-1}$, démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Initialisation : pour $n = 1, P^{-1}MP = D \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie $i.e. M^n = PD^nP^{-1}$ $M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1}M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a donc démontré que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est à dire $M^n = PD^nP^{-1}$. $M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}7^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0{,}7^n\\2 & -0{,}7^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$ $M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\times0{,}7^n & 1-0{,}7^n\\2-2\times0{,}7^n & 2+0{,}7^n\end{pmatrix}$	

3	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ U_n = M^n U_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times 0{,}7^n & 1-0{,}7^n \\ 2-2\times 0{,}7^n & 2+0{,}7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+2\times 0{,}7^n & 1-0{,}7^n \\ 2-2\times 0{,}7^n & 2+0{,}7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times 0{,}7^n}{6} + \frac{1-0{,}7^n}{6} \\ \frac{2-2\times 0{,}7^n}{6} + \frac{2+0{,}7^n}{6} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{2+0{,}7^n}{6} \\ \frac{4-0{,}7^n}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\times 0{,}7^n \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\times 0{,}7^n \end{pmatrix}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{2}{3}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$ A long terme, la répartition des souris s'approchera de 1/3 dans le compartiment A et de 2/3 dans le compartiment B.