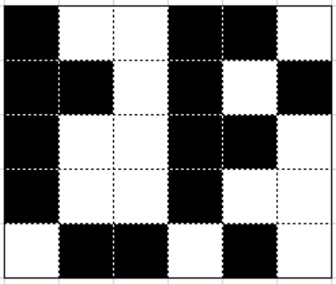
Traitement de l'image

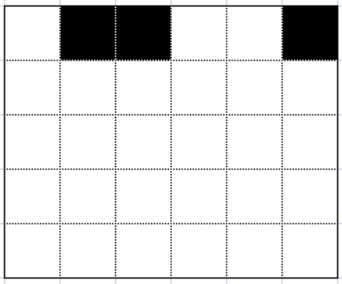
1. Numériser des images ... imager les nombres

On a extrait l'image ci-contre d'une photographie d'Alan Turing disputant une course de 3 miles en 1946. Cette photographie a été reproduite sur le site web : http://www.turing.org.uk/turing/scrapbook/run.html
consacré à l'un des « inventeurs » de l'informatique. Elle a donc été «numérisée», c'est-à-dire transformée en une suite de 0 et de 1. Le rectangle est décomposé en un certain nombre de petits carrés, et à chacun de ces carrés a été attribué un nombre qui représente une nuance de gris. La finesse de la décomposition (le nombre de carrés) est la *définition* de l'image. La définition de cette image particulière n'est pas bonne : on devine les *pixels* (mot fabriqué avec les débuts des mots anglais *picture element*).
Toute image n'utilisant que le noir et le blanc peut ainsi être représentée par un tableau contenant autant de cases que l'image contient de pixels, chacune de ces cases étant occupée par 0 ou 1. L'image est donc représentée par une matrice dont tous les éléments sont 0 ou 1.

2. Opérations sur les images



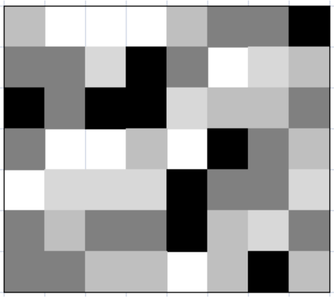
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

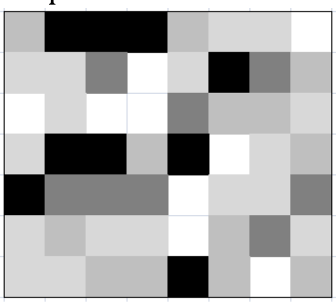


$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On transforme la matrice A associée à l'image de gauche en remplaçant 1 par 0 et 0 par 1, on obtient la matrice B, associée à l'image de droite, qui est le négatif de l'image de gauche.

On peut également coder des images en nuances de gris en attribuant à chaque pixel un nombre compris entre 0 et 1, proche de 1 si la case est gris foncé, proche de 0 si elle est gris clair. On peut également définir l'image négatif de l'image de départ en lui associant la matrice dont les éléments sont les compléments à 1 des éléments de la matrice de départ.





Les deux images ci-dessus sont le négatif l'une de l'autre. D'autres critères peuvent être enregistrés dans les éléments de la matrice associée à une image, la luminosité par exemple. Une multiplication de tous les éléments de la matrice représentant la luminosité par un même facteur modifie la luminosité de l'ensemble.
Si deux images ont le même format et la même définition (associées aux matrices A et B), il est possible de leur faire correspondre leur *somme*, associée à la somme des matrices qui les définissent, en convenant qu'un coefficient supérieur à 1 donne un pixel de couleur noire. On peut aussi leur faire correspondre leur *différence*, avec cette fois la convention que tout pixel associé à un nombre négatif est blanc, ou restituer l'image positive $|A - B|$ en particulier pour différentier les images et faire apparaître la trame des contours, horizontaux, verticaux, obliques.

Exercices :
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image4.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image6.jsp

3. Des matrices pour réaliser des transformations

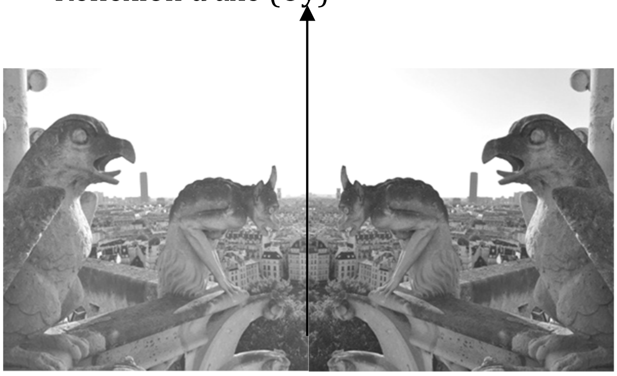
À tout point du plan, de coordonnées $(x; y)$ données dans un repère (que nous choisirons orthonormal pour que l'action sur les figures soit mieux visible), on peut associer un autre point, de coordonnées $(x'; y')$ définies par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si, par exemple, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = -1$, les coordonnées $(x; y)$ d'un point quelconque sont transformées en $(x; -y)$, qui sont les coordonnées de son symétrique par rapport à l'axe horizontal.

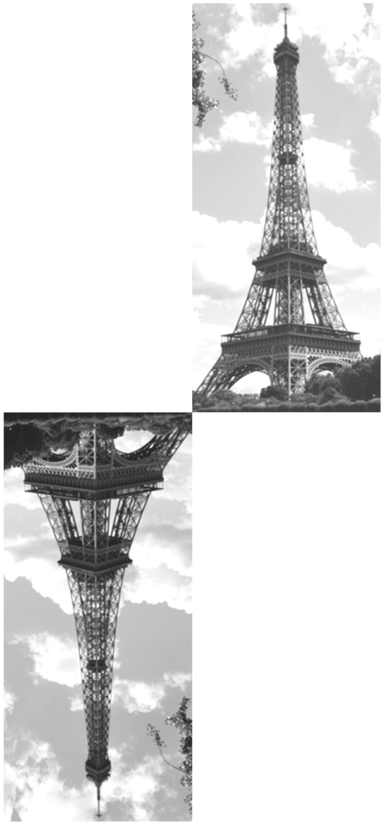
Trouver les coefficients correspondants :

Réflexion d'axe (Oy)



Réduction (multiplication des dimensions par 0,5)

Symétrie centrale



Affinité orthogonale de base l'axe (Ox) de rapport 0,5