SUJET N° 1

Exercice 1. (7 points)

▶ 1. Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

▶ 2. Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^2 - 13x - 7$.

▶ 3. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{9x^4 - 12x^2 + 4}$ possède-t-elle un ou des valeurs interdites ?

Exercice 1.	**1.**	$$x^2 + x + 1 = 0$$ $$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$ **L'équation n'a pas de solution.**
	2.	$$P(x) = 2x^2 - 13x - 7$$ $$\Delta = 13^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 169 + 56 = 225 > 0$$ Le polynôme admet donc 2 racines : $$x_1 = \frac{13 - \sqrt{225}}{2 \times 2} = \frac{13 - 15}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$ $$x_2 = \frac{13 + \sqrt{225}}{2 \times 2} = \frac{13 + 15}{4} = \frac{28}{4} = 7$$ On peut alors écrire $P(x) = 2\left(x - \left(\frac{-1}{2}\right)\right)(x - 7)$ $$\boldsymbol{P(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 7)}$$
	3.	La fonction f aura des valeurs interdites si $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$ Posons $X = x^2$ alors $X^2 = x^4$. On peut alors écrire que : $$9X^2 - 12X + 4 = 0$$ $$\Delta = 12^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$$ La seule valeur possible pour X est alors $X = \frac{12}{2 \times 9} = \frac{2}{3}$ Les valeurs interdites vérifient donc $x^2 = \frac{2}{3}$. **La fonction f admet deux valeurs interdites : $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$**

Exercice 2. (4 points)

On considère la fonction polynomiale $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$

- ▶ 1. Donner, en détaillant, la forme canonique de f.
- ▶ 2. Démontrer que la fonction f admet un extremum.
- ▶ 3. Que peut-on dire de l'équation $f(x) = 3$? Justifier votre réponse.

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 2.</td><td>1.</td><td>$f(x) = -5x^2 + 10x - 3$
$f(x) = -5(x^2 - 2x) - 3$
$f(x) = -5[(x-1)^2 - 1] - 3$
$f(x) = -5(x-1)^2 + 5 - 3$
$\mathbf{f(x) = -5(x-1)^2 + 2}$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow \quad -5(x-1)^2 \leq 0$
$\Leftrightarrow \quad -5(x-1)^2 + 2 \leq 2$
$\Leftrightarrow \quad f(x) \leq 2$
et $f(1) = -5(1-1)^2 + 2 = 2$
La fonction f admet donc un maximum qui vaut 2 et qui est atteint pour $x = 1$.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>La fonction f admettant 2 pour maximum, on peut en déduire que l'équation $f(x) = 3$ n'admet aucune solution.</td></tr>
</table>

Exercice 3. (3 points)

La piscine rectangulaire d'Emmy mesure 33 mètres de périmètre et sa surface est de 63 m^2. **Quelles sont les dimensions de la piscine d'Emmy ?**

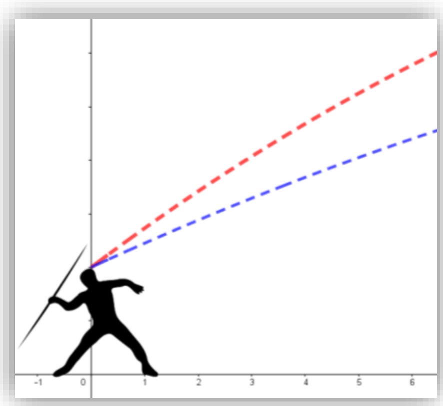
<table>
<tr><td>Exercice 3.</td><td>Notons x et y la longueur et la largeur en mètres de la piscine rectangulaire d'Emmy.

On peut écrire que $2(x+y) = 33$ et que $x \times y = 63$.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{33}{2} = 16{,}5 \\ xy = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 16{,}5 - x \\ x(16{,}5 - x) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 16{,}5 - x \\ -x^2 + 16{,}5x - 63 = 0 \end{cases}$$
$$\Delta = 16{,}5^2 - 4 \times 63 = 20{,}25 > 0$$
Il y a deux solutions :
$$x_1 = \frac{-16{,}5 - \sqrt{20{,}25}}{-2} = \frac{-16{,}5 - 4{,}5}{-2} = \frac{-21}{-2} = 10{,}5 \text{ et donc } y = 6$$
$$x_2 = \frac{-16{,}5 + \sqrt{20{,}25}}{-2} = \frac{-16{,}5 + 4{,}5}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \text{ et donc } y = 10{,}5$$
La piscine d'Emmy mesure donc 10,5 mètres sur 6 mètres.</td></tr>
</table>

Exercice 4. (5 points)

Un athlète s’entraîne au lancer de javelot. Au moment du lancer, le lanceur tient le javelot de telle manière que la pointe se trouve à la hauteur du sommet de son crâne. La trajectoire de la pointe du javelot est modélisée par une parabole, le lanceur se situe à l’origine du repère.



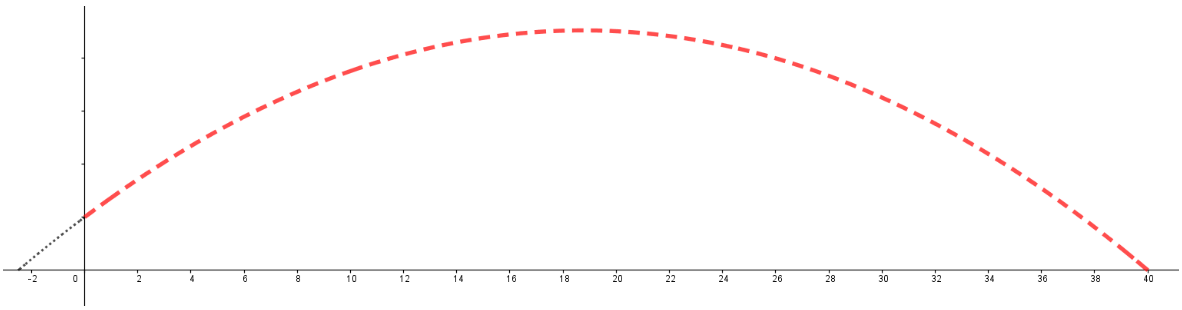
▶**1.** Lors du premier essai de l’athlète, la trajectoire de la pointe du javelot est donnée par la fonction f telle que $\boldsymbol{f(x) = -0,02x^2 + 0,75x + 2}$ où x est la distance au sol en mètres parcourue par la pointe du javelot et $f(x)$ l'altitude, en mètres, de la pointe du javelot quand celle-ci se trouve à une distance au sol de x mètres du lanceur. On donne ci-dessous la représentation graphique de *f*.

a. Quelle est la taille de l’athlète ?

b. Quelle est la distance au sol totale parcourue par le javelot ?

▶**2.** Lors du deuxième essai, la pointe du javelot réalise une trajectoire décrite par la fonction h telle que $\boldsymbol{h(x) = -0,01x^2 + 0,46x + 2}$

L’athlète a-t-il amélioré sa performance par rapport à son premier lancer ? On justifiera sa réponse.

Exercice 4.	**1a.**	$f(0) = -0{,}02 \times 0 + 0{,}75 \times 0 + 2 = 2$ Au moment du lancer, le lanceur tient le javelot de telle manière que la pointe se trouve à la hauteur du sommet de son crâne donc l’athlète mesure 2 mètres de haut.
	1b.	La distance au sol totale parcourue par le javelot se mesure lorsque $f(x) = 0$ $-0{,}02x^2 + 0{,}75x + 2 = 0$ $\Delta = 0{,}75^2 - 4 \times (-0{,}02) \times 2 = 0{,}7225$ $x_1 = \dfrac{-0{,}75 - 0{,}85}{-0{,}04} = \dfrac{-1{,}6}{-0{,}04} = 40$ $x_2 = \dfrac{-0{,}75 + 0{,}85}{-0{,}04} = \dfrac{0{,}1}{-0{,}04} = -2{,}5$  **Le javelot a donc parcouru 40 mètres.**

2.

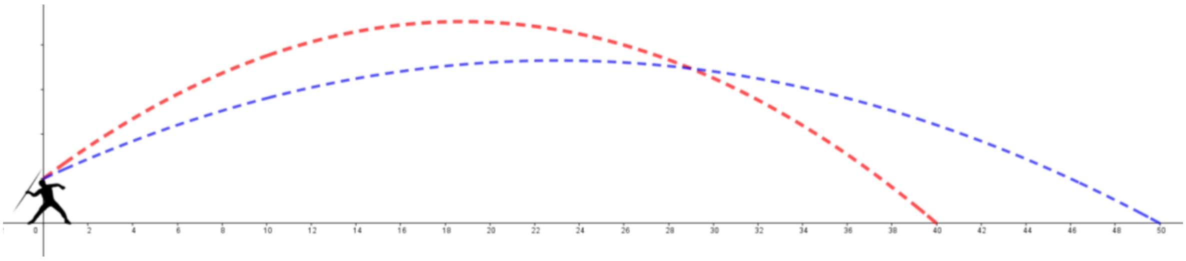
$$h(x) = 0$$

$$-0{,}01x^2 + 0{,}46x + 2 = 0$$

$$\Delta = 0{,}46^2 - 4 \times (-0{,}01) \times 2 = 0{,}2916$$

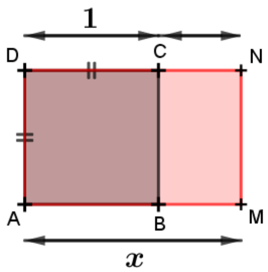
$$x_1 = \frac{-0{,}46 - 0{,}54}{-0{,}02} = \frac{-1}{-0{,}02} = 50$$

$$x_2 = \frac{-0{,}46 + 0{,}54}{-0{,}02} = \frac{0{,}08}{-0{,}02} = -4$$



Le javelot a parcouru 50 mètres, soit 10 mètres de plus.

Exercice 5. (1 point)



ABCD est un carré de côté 1. **Quelle longueur *AM* doit-on donner au rectangle *AMND* pour que les ratios $\frac{\textbf{Longueur}}{\textbf{Largeur}}$ des rectangles *AMND* et *BMNC* soient identiques ?** *Justifier.*

Exercice 5.

Le rectangle $AMND$ a pour longueur x et pour largeur 1, son ratio $\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$ est donc égal à $\frac{x}{1}$.

Le rectangle $BMNC$ a pour longueur 1 et pour largeur $x - 1$, son ratio $\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$ est donc égal à $\frac{1}{x-1}$.

On a alors $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ **et** $\boldsymbol{x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ **le nombre d'or !**

SUJET N° 2

Exercice 1. (7 points)

▶ 1. Factoriser le polynôme $P(x) = 4x^2 - 21x + 5$.

▶ 2. Résoudre l'équation $x^2 + x + 2 = 0$.

▶ 3. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{36x^4 - 12x^2 + 1}$ possède-t-elle un ou des valeurs interdites ?

Exercice 1.	**1.**	$$P(x) = 4x^2 - 21x + 5$$ $$\Delta = 21^2 - 4 \times 4 \times 5 = 441 - 80 = 361 > 0$$ Le polynôme admet donc 2 racines : $x_1 = \dfrac{21 - \sqrt{361}}{2 \times 4} = \dfrac{21 - 19}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ $x_2 = \dfrac{21 + \sqrt{361}}{2 \times 4} = \dfrac{21 + 19}{8} = \dfrac{40}{8} = 5$ On peut alors écrire $\boldsymbol{P(x) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 5)}$
	2.	$$x^2 + x + 2 = 0$$ $$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$ **L'équation n'a pas de solution.**
	3.	La fonction f aura des valeurs interdites si $36x^4 - 12x^2 + 1 = 0$ Posons $X = x^2$ alors $X^2 = x^4$. On peut alors écrire que : $$36X^2 - 12X + 1 = 0$$ $$\Delta = 12^2 - 4 \times 36 = 144 - 144 = 0$$ La seule valeur possible pour X est alors $X = \frac{12}{2\times36} = \frac{1}{6}$ Les valeurs interdites vérifient donc $x^2 = \frac{1}{6}$. **La fonction f admet deux valeurs interdites : $x = \sqrt{\frac{1}{6}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{6}}$**

Exercice 2. (4 points)

On considère la fonction polynomiale $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

▶ 1. Donner, en détaillant, la forme canonique de f.

▶ 2. Démontrer que la fonction f admet un extremum.

▶ 3. Que peut-on dire de l'équation $f(x) = 2$? Justifier votre réponse.

Exercice 2.	**1.**	$f(x) = -3x^2 + 6x - 2$ $f(x) = -3(x^2 - 2x) - 2$ $f(x) = -3[(x-1)^2 - 1] - 2$ $f(x) = -3(x-1)^2 + 3 - 2$ $\boldsymbol{f(x) = -3(x-1)^2 + 1}$
	2.	$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow\ -3(x-1)^2 \leq 0$ $\Leftrightarrow\ -3(x-1)^2 + 1 \leq 1$ $\Leftrightarrow\ f(x) \leq 1$ et $f(1) = -3(1-1)^2 + 1 = 1$ **La fonction f admet donc un maximum qui vaut 1 et qui est atteint pour $x = 1$.**
	3.	La fonction f admettant 1 pour maximum, on peut en déduire que l'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution.

Exercice 3. (3 points)

La piscine rectangulaire d'Emmy mesure 29 mètres de périmètre et sa surface est de 51 m^2. **Quelles sont les dimensions de la piscine d'Emmy ?**

Exercice 3.

Notons x et y la longueur et la largeur en mètres de la piscine rectangulaire d'Emmy.

On peut écrire que $2(x + y) = 29$ et que $x \times y = 51$.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{29}{2} = 14{,}5 \\ xy = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14{,}5 - x \\ x(14{,}5 - x) = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14{,}5 - x \\ -x^2 + 14{,}5x - 51 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 14{,}5^2 - 4 \times 51 = 6{,}25 > 0$$

Il y a deux solutions :

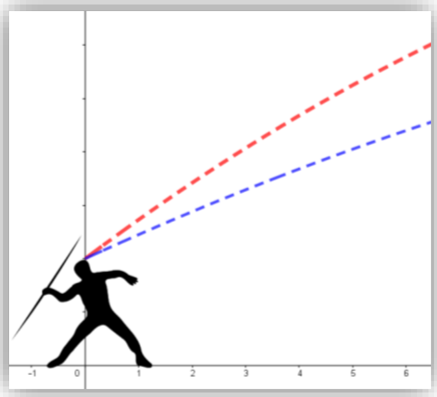
$$x_1 = \frac{-14{,}5 - \sqrt{6{,}25}}{-2} = \frac{-14{,}5 - 2{,}5}{-2} = \frac{-17}{-2} = 8{,}5 \text{ et donc } y = 6$$

$$x_2 = \frac{-14{,}5 + \sqrt{6{,}25}}{-2} = \frac{-14{,}5 + 2{,}5}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \text{ et donc } y = 8{,}5$$

La piscine d'Emmy mesure donc 8,5 mètres sur 6 mètres.

Exercice 4. (5 points)

Un athlète s'entraîne au lancer de javelot. Au moment du lancer, le lanceur tient le javelot de telle manière que la pointe se trouve à la hauteur du sommet de son crâne. La trajectoire de la pointe du javelot est modélisée par une parabole, le lanceur se situe à l'origine du repère.



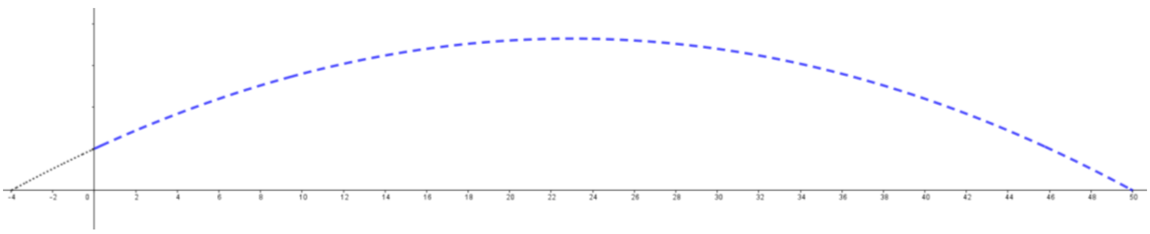
▶**1.** Lors du premier essai de l'athlète, la trajectoire de la pointe du javelot est donnée par la fonction f telle que $\boldsymbol{f(x) = -0,01x^2 + 0,46x + 2}$ où x est la distance au sol en mètres parcourue par la pointe du javelot et $f(x)$ l'altitude, en mètres, de la pointe du javelot quand celle-ci se trouve à une distance au sol de x mètres du lanceur. On donne ci-dessous la représentation graphique de f.

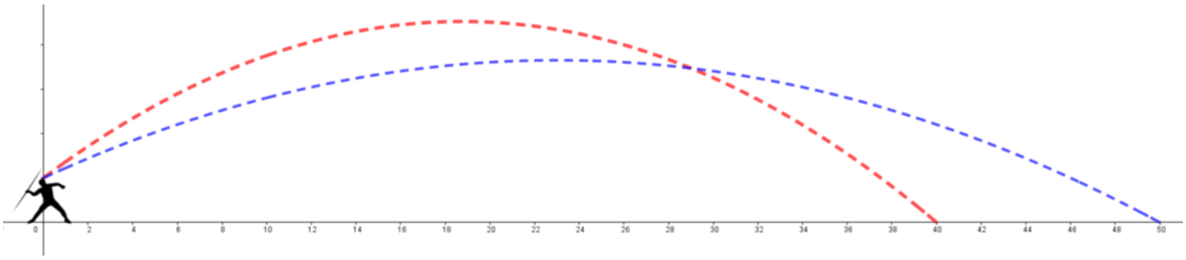
c. Quelle est la taille de l'athlète ?

d. Quelle est la distance au sol totale parcourue par le javelot ?

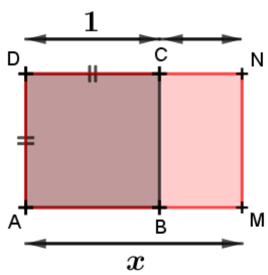
▶**2.** Lors du deuxième essai, la pointe du javelot réalise une trajectoire décrite par la fonction h telle que $\boldsymbol{h(x) = -0,02x^2 + 0,75x + 2}$

L'athlète a-t-il amélioré sa performance par rapport à son premier lancer ? On justifiera sa réponse.

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 4.</td><td>1a.</td><td>$f(0) = -0{,}02 \times 0 + 0{,}75 \times 0 + 2 = 2$
Au moment du lancer, le lanceur tient le javelot de telle manière que la pointe se trouve à la hauteur du sommet de son crâne donc l'athlète mesure 2 mètres de haut.</td></tr>
<tr><td>1b.</td><td>La distance au sol totale parcourue par le javelot se mesure lorsque
$$f(x) = 0$$
$$-0{,}01x^2 + 0{,}46x + 2 = 0$$
$$\Delta = 0{,}46^2 - 4 \times (-0{,}01) \times 2 = 0{,}2916$$
$$x_1 = \frac{-0{,}46 - 0{,}54}{-0{,}02} = \frac{-1}{-0{,}02} = 50$$
$$x_2 = \frac{-0{,}46 + 0{,}54}{-0{,}02} = \frac{0{,}08}{-0{,}02} = -4$$

Le javelot a donc parcouru 50 mètres.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$$h(x) = 0$$
$$-0{,}02x^2 + 0{,}75x + 2 = 0$$</td></tr>
</table>

		$\Delta = 0{,}75^2 - 4 \times (-0{,}02) \times 2 = 0{,}7225$ $x_1 = \dfrac{-0{,}75 - 0{,}85}{-0{,}04} = \dfrac{-1{,}6}{-0{,}04} = 40$ $x_2 = \dfrac{-0{,}75 + 0{,}85}{-0{,}04} = \dfrac{0{,}1}{-0{,}04} = -2{,}5$  **Le javelot a parcouru 40 mètres, soit 10 mètres de moins.**

Exercice 5. (1 point)



$ABCD$ est un carré de côté 1. **Quelle longueur AM doit-on donner au rectangle $AMND$ pour que les ratios $\dfrac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$ des rectangles $AMND$ et $BMNC$ soient identiques ?** *Justifier.*

Exercice 5.	Le rectangle $AMND$ a pour longueur x et pour largeur 1, son ratio $\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$ est donc égal à $\frac{x}{1}$. Le rectangle $BMNC$ a pour longueur 1 et pour largeur $x-1$, son ratio $\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$ est donc égal à $\frac{1}{x-1}$. On a alors $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5$ $\boldsymbol{x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$ **et** $\boldsymbol{x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ **le nombre d'or !**