LYCEE Polyvalent Albert EINSTEIN

Vendredi 26 mai 2023
Première Générale ➡ Contrôle n° 6

Table des matières

Première Générale ➡ Contrôle n° 6 1
Enoncé du Sujet 1 2
Exercice 1. (4 points) 2
Exercice 2. (9 points) 2
Exercice 3. (7 points) 2
Enoncé du Sujet 2 3
Exercice 1. (4 points) 3
Exercice 2. (9 points) 3
Exercice 3. (7 points) 3
Corrigé du Sujet 1 4
Correction de l'exercice 1. (4 points) 4
Correction de l'exercice 2. (9 points) 4
Correction de l'exercice 3. (7 points) 6
Corrigé du Sujet 2 9
Correction de l'exercice 1. (4 points) 9
Correction de l'exercice 2. (9 points) 9
Correction de l'exercice 3. (7 points) 11

Vendredi 26 mai 2023
Première Générale ➡ Contrôle n° 6
Enoncé du Sujet 1

Exercice 1. (4 points)

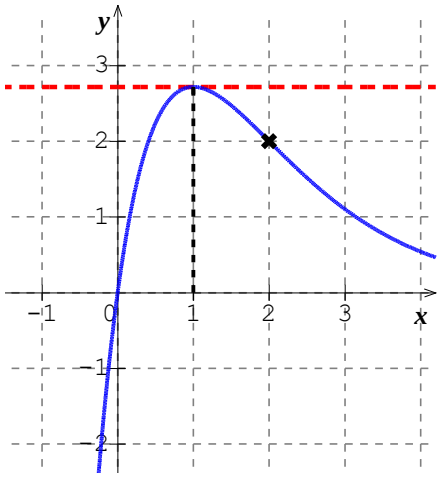
▶1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{(e^{2x})^5 \times e^{-2x}}{(e^{4x})^{-1}} \geq e$.

▶2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(3e^x + 1)e^x = 4$.

Exercice 2. (9 points)

Partie A.

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.



▶1 a) Lire graphiquement $f(2)$.

b) Lire graphiquement $f'(1)$.

▶2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{ax+b}.$$

Déterminer, en justifiant, les valeurs de a et b.

Partie B.

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer ou de limiter la propagation des bactéries.

Une estimation, pour l'instant t en heure(s), de la concentration en mg/L dans le sang du patient est donnée par la fonction définie sur $[0\,;10]$ par

$$g(t) = \frac{t}{e^{t-2}}.$$

Quelle sera la concentration maximale dans le sang du patient et à quel moment a-t-elle lieu ? Justifier votre réponse.

Exercice 3. (7 points)

▶1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -xe^x - 1$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

c) En déduire le signe de la fonction g.

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g en 0.

▶2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x+1}{e^x-1}$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

Lycée Polyvalent Albert EINSTEIN

Vendredi 26 mai 2023
Première Générale ➡ Contrôle n° 6
Enoncé du Sujet 2

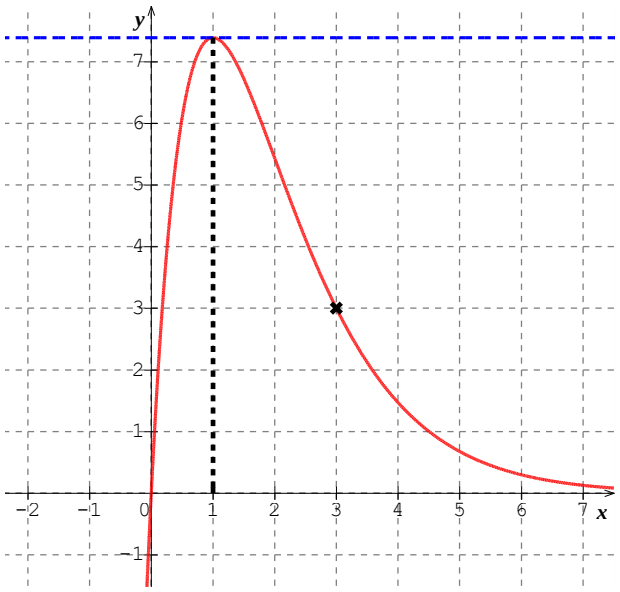
Exercice 1. (4 points)

▶1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{(e^{5x})^3 \times e^{-4x}}{(e^{3x})^{-1}} \geq e$.

▶2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(4e^x - 1)e^x = 3$.

Exercice 2. (9 points)

Partie A. On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.



▶1 a) Lire graphiquement $f(3)$.

b) Lire graphiquement $f'(1)$.

▶2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{ax+b}.$$

Déterminer, en justifiant, les valeurs de a et b.

Partie B.

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer ou de limiter la propagation des bactéries.

Une estimation, pour l'instant t en heure(s), de la concentration en mg/L dans le sang du patient est donnée par la fonction définie sur $[0\,;10]$ par

$$g(t) = \frac{t}{e^{t-3}}.$$

Quelle sera la concentration maximale dans le sang du patient et à quel moment a-t-elle lieu ? Justifier votre réponse.

Exercice 3. (7 points)

▶1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -xe^x - 1$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

c) En déduire le signe de la fonction g.

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g en 0.

▶2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x+1}{e^x - 1}$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

Vendredi 26 mai 2023
Première Générale ➡ Contrôle n° 6
Corrigé du Sujet 1

Correction de l'exercice 1. (4 points)

▶1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{(e^{2x})^5 \times e^{-2x}}{(e^{4x})^{-1}} \geq e$.

▶2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(3e^x + 1)e^x = 4$.

Exercice 1.

1.

$$\frac{(e^{2x})^5 \times e^{-2x}}{(e^{4x})^{-1}} \geq e$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{10x} \times e^{-2x}}{e^{-4x}} \geq e$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{8x}}{e^{-4x}} \geq e$$
$$\Leftrightarrow e^{8x+4x} \geq e$$
$$\Leftrightarrow e^{12x} \geq e^1$$
$$\Leftrightarrow 12x \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{12}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{12}; +\infty\right[$.

2.

$$(3e^x + 1)e^x = 4$$
$$\Leftrightarrow 3e^{2x} + e^x - 4 = 0$$

Posons $X = e^x$, on a alors $3X^2 + X - 4 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \times 3 \times (-4) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Il y a deux X solutions :

$$X_1 = \frac{-1-7}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} = e^x \text{ impossible, pas de solution}$$
$$X_2 = \frac{-1+7}{6} = \frac{6}{6} = 1 = e^x \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

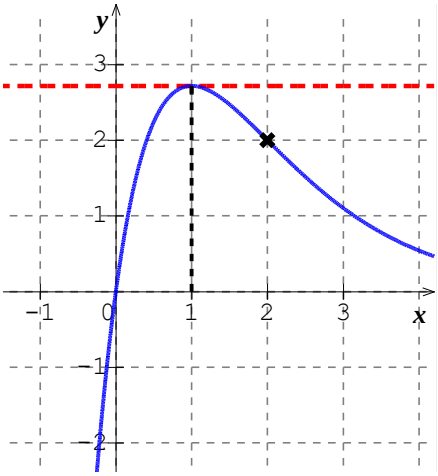
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\}$.

Correction de l'exercice 2. (9 points)

Partie A.

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.



▶1 a) Lire graphiquement $f(2)$.

b) Lire graphiquement $f'(1)$.

▶2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{ax+b}.$$

Déterminer, en justifiant, les valeurs de a et b.

Partie B.

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer ou de limiter la propagation des bactéries. Une estimation, pour l'instant t en heure(s), de la concentration en mg/L dans le sang du patient est donnée par la fonction définie sur $[0\,;10]$ par

$$g(t) = \frac{t}{e^{t-2}}.$$

Quelle sera la concentration maximale dans le sang du patient et à quel moment a-t-elle lieu ? Justifier votre réponse.

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 2. Partie A.</td><td>1a.</td><td colspan="2">$f(2)$ est l'image par la fonction f du nombre 2. Sur le graphique, c'est l'ordonnée du point de la courbe de f qui a pour abscisse 2, c'est donc 2.
$f(2) = 2$</td></tr>
<tr><td>1b.</td><td colspan="2">$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f qui a pour abscisse 1. La tangente est horizontale donc son coefficient directeur vaut 0 : $f'(1) = 0$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$f(x) = xe^{ax+b}$
$f(2) = 2 = 2e^{2a+b}$
$\Leftrightarrow \frac{2}{2} = e^{2a+b}$
$\Leftrightarrow e^{2a+b} = 1 = e^0$
$\Leftrightarrow 2a + b = 0$</td><td>$f'(x) = 1 \times e^{ax+b} + x \times ae^{ax+b}$
$f'(x) = (1 + ax)e^{ax+b}$
$f'(1) = 0 = (1 + a \times 1)e^{a\times 1+b}$
$\Leftrightarrow 0 = 1 + a$ car $e^{a+b} \neq 0$
$\Leftrightarrow a = -1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$a = -1$ et $2a + b = 0$
$2 \times (-1) + b = 0 \Leftrightarrow b = 2$
$f(x) = xe^{-x+2}$</td></tr>
</table>

Exercice 2. Partie B.

$\forall t \in [0\,;10]\ \ g(t) = \dfrac{t}{e^{t-2}}$

La fonction g est dérivable sur $[0\,;10]$ et $\forall t \in [0\,;10]$

$$g'(t) = \frac{1 \times e^{t-2} - t \times e^{t-2}}{(e^{t-2})^2}$$

$$g'(t) = \frac{(1-t)e^{t-2}}{(e^{t-2})^2} = \frac{1-t}{e^{t-2}}$$

$g'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - t > 0$ car $e^{t-2} > 0$

$\Leftrightarrow 1 > t$

t	0		1		10
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	e	↘	$\frac{10}{e^8}$

$g(1) = \dfrac{1}{e^{1-2}} = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$

La concentration sera maximale dans le sang du patient au bout d'une heure et elle vaudra $e \approx 2,72$ mg/L

Correction de l'exercice 3. (7 points)

▶1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -xe^x - 1$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

c) En déduire le signe de la fonction g.

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g en 0.

▶2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x+1}{e^x - 1}$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

Exercice 3.

1a.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ g'(x) = -1 \times e^x - xe^x - 0$

$g'(x) = (-1 - x)e^x$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 - x > 0$ car $e^x > 0$

$\Leftrightarrow -1 > x$

1b.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	$e^{-1}-1$	↘

$$g(-1) = -(-1)e^{-1} - 1 = e^{-1} - 1 \approx -0{,}63$$

1c.

Le maximum de la fonction g est un nombre négatif, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ g(x) < 0$$

1d.

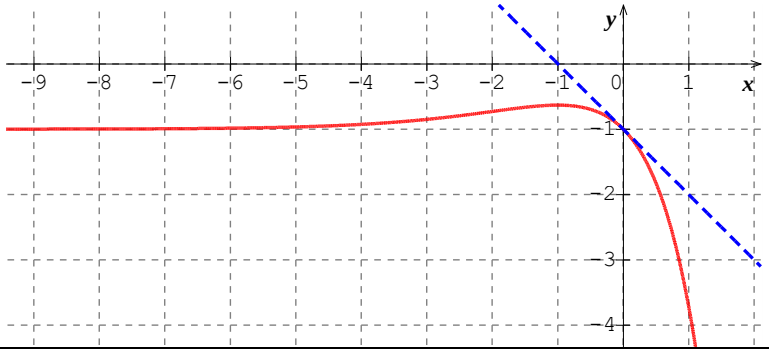
$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$

$g'(0) = (-1 - 0)e^0 = -1$

$g(0) = -0 \times e^0 - 1 = -1$

L'équation de la tangente à la courbe de g en 0 est :

$$y = -x - 1$$



2a.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*\ \ f'(x) = \frac{1 \times (e^x - 1) - (x + 1) \times e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x - e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

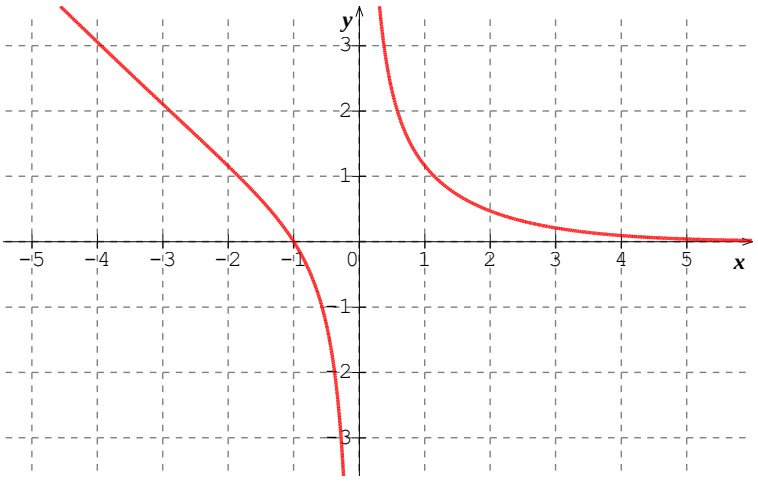
$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

D'après la question 1. $g(x) < 0$ et $(e^x - 1)^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^*$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*\ f'(x) < 0$

2b.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$



Vendredi 26 mai 2023
Première Générale ➡ Contrôle n° 6
Corrigé du Sujet 2

Correction de l'exercice 1. (4 points)

▶1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{(e^{5x})^3 \times e^{-4x}}{(e^{3x})^{-1}} \geq e$.

▶2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(4e^x - 1)e^x = 3$.

Exercice 1.

1.

$$\frac{(e^{5x})^3 \times e^{-4x}}{(e^{3x})^{-1}} \geq e$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{15x} \times e^{-4x}}{e^{-3x}} \geq e$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{11x}}{e^{-3x}} \geq e$$
$$\Leftrightarrow e^{11x+3x} \geq e$$
$$\Leftrightarrow e^{14x} \geq e^1$$
$$\Leftrightarrow 14x \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{14}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{14}; +\infty\right[$.

2.

$$(4e^x - 1)e^x = 3$$
$$\Leftrightarrow 4e^{2x} - e^x - 3 = 0$$

Posons $X = e^x$, on a alors $4X^2 - X - 3 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \times 4 \times (-3) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Il y a deux X solutions :

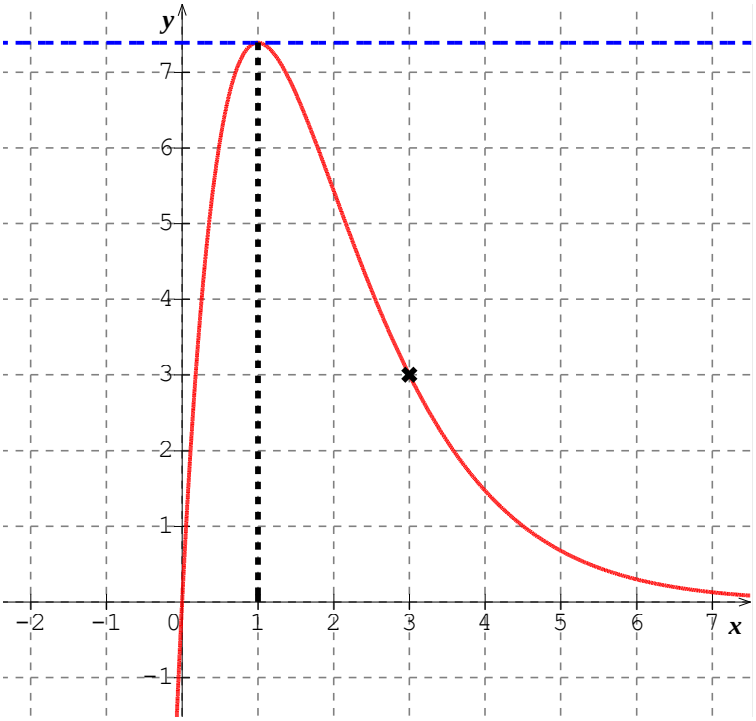
$$X_1 = \frac{1-7}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} = e^x \text{ impossible, pas de solution}$$

$$X_2 = \frac{1+7}{8} = \frac{8}{8} = 1 = e^x \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\}$.

Correction de l'exercice 2. (9 points)

Partie A. On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.



▶1 a) Lire graphiquement $f(3)$.

b) Lire graphiquement $f'(1)$.

▶2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{ax+b}.$$

Déterminer, en justifiant, les valeurs de a et b.

Partie B.

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer ou de limiter la propagation des bactéries.

Une estimation, pour l'instant t en heure(s), de la concentration en mg/L dans le sang du patient est donnée par la fonction définie sur $[0\,;10]$ par

$$g(t) = \frac{t}{e^{t-3}}.$$

Quelle sera la concentration maximale dans le sang du patient et à quel moment a-t-elle lieu ? Justifier votre réponse.

↑

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 2. Partie A.</td><td>1a.</td><td colspan="2">$f(3)$ est l'image par la fonction f du nombre 3. Sur le graphique, c'est l'ordonnée du point de la courbe de f qui a pour abscisse 3, c'est donc 3.
$f(3) = 3$</td></tr>
<tr><td>1b.</td><td colspan="2">$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f qui a pour abscisse 1. La tangente est horizontale donc son coefficient directeur vaut 0 : $f'(1) = 0$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$f(x) = xe^{ax+b}$
$f(3) = 3 = 3e^{3a+b}$
$\Leftrightarrow \frac{3}{3} = e^{3a+b}$
$\Leftrightarrow e^{3a+b} = 1 = e^0$
$\Leftrightarrow 3a + b = 0$</td><td>$f'(x) = 1 \times e^{ax+b} + x \times ae^{ax+b}$
$f'(x) = (1 + ax)e^{ax+b}$
$f'(1) = 0 = (1 + a \times 1)e^{a\times 1+b}$
$\Leftrightarrow 0 = 1 + a$ car $e^{a+b} \neq 0$
$\Leftrightarrow a = -1$</td></tr>
</table>

$a = -1$ et $3a + b = 0$

$$3 \times (-1) + b = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

$$f(x) = xe^{-x+3}$$

Exercice 2. Partie B.

$\forall t \in [0\,;10]$ $g(t) = \dfrac{t}{e^{t-3}}$

La fonction g est dérivable sur $[0\,;10]$ et $\forall t \in [0\,;10]$

$$g'(t) = \frac{1 \times e^{t-3} - t \times e^{t-3}}{(e^{t-3})^2}$$

$$g'(t) = \frac{(1-t)e^{t-3}}{(e^{t-3})^2} = \frac{1-t}{e^{t-3}}$$

$g'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - t > 0$ car $e^{t-3} > 0$

$\Leftrightarrow 1 > t$

t	0		1		10
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	e	↘	$\frac{10}{e^7}$

$$g(1) = \frac{1}{e^{1-3}} = \frac{1}{e^{-2}} = e^2$$

La concentration sera maximale dans le sang du patient au bout d'une heure et elle vaudra $e \approx 7,39$ mg/L

Correction de l'exercice 3. (7 points)

▶1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -xe^x - 1$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

c) En déduire le signe de la fonction g.

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g en 0.

▶2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x+1}{e^x - 1}$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

Exercice 3.

1a.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ g'(x) = -1 \times e^x - xe^x - 0$

$g'(x) = (-1 - x)e^x$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 - x > 0 \ \ \text{car}\ \ e^x > 0$

$\Leftrightarrow -1 > x$

1b.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	$e^{-1}-1$	↘

$g(-1) = -(-1)e^{-1} - 1 = e^{-1} - 1 \approx -0{,}63$

1c.

Le maximum de la fonction g est un nombre négatif, on en déduit que

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ g(x) < 0$

1d.

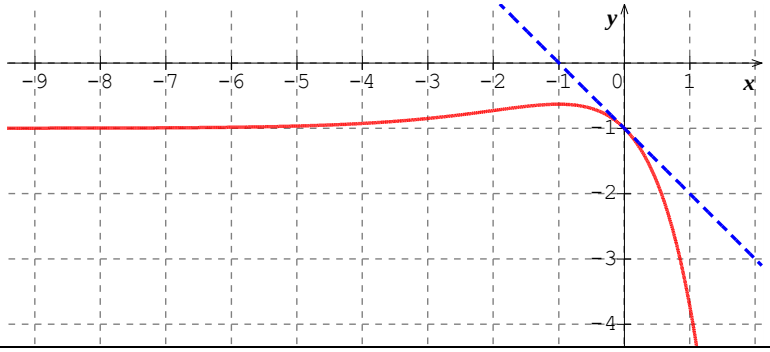
$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$

$g'(0) = (-1 - 0)e^0 = -1$

$g(0) = -0 \times e^0 - 1 = -1$

L'équation de la tangente à la courbe de g en 0 est :

$y = -x - 1$



2a.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

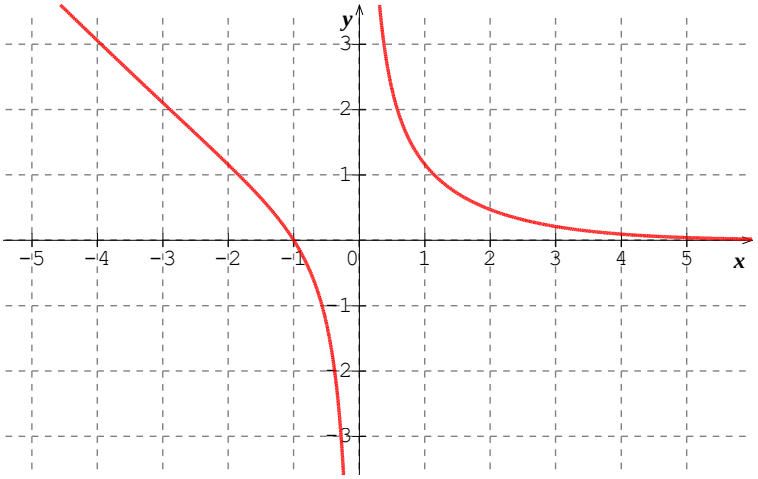
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{1 \times (e^x - 1) - (x+1) \times e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x - e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

D'après la question 1. $g(x) < 0$ et $(e^x - 1)^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$
donc $\forall x \in \mathbb{R}^* \; f'(x) < 0$

2b.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	↘	‖	↘