Lundi 7 octobre 2024

Première ➡ Contrôle n° 1

Spécialité Mathématiques

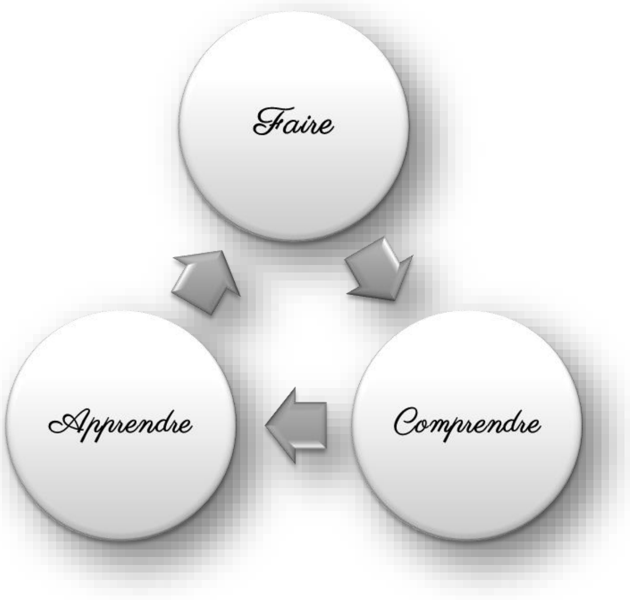


Table des matières

Première ➡ Contrôle n° 1

Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Enoncé du sujet A

Exercice 1. (4 points)

On considère la fonction polynomiale $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$

▶ 1. Donner, en détaillant, la forme canonique de f.

▶ 2. En déduire que, pour tout nombre x, $f(x) \geq 3$.

▶ 3. En déduire, sans faire de calcul, le nombre de racine(s) de la fonction f.

Exercice 2. (6 points)

▶ 1. Résoudre l'équation $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

▶ 2. Factoriser le polynôme $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

▶ 3. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - x + 2}$ possède-t-elle des valeurs interdites ? Justifier.

Exercice 3. (4 points)

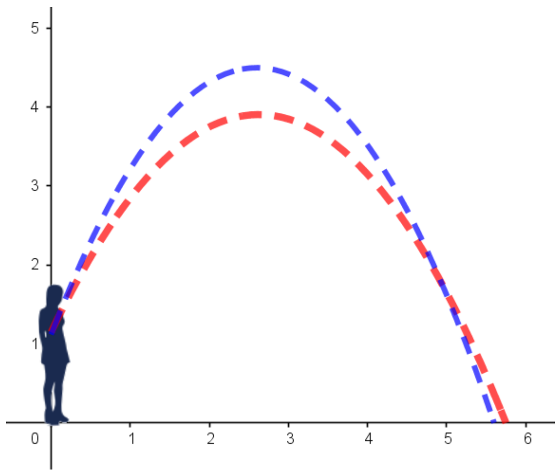
Ada et Maryam participent à une compétition de lancer de poids. On imagine qu'elles sont placées à l'origine du repère gradué en mètre.

Dans ce cas, le poids lancé par Maryam suit pour trajectoire la parabole

$$\mathcal{P}_1 : y = -0{,}4x^2 + 2{,}1\,x + 1{,}15.$$

Celui lancé par Ada suit pour trajectoire la parabole

$$\mathcal{P}_2 : y = -0{,}5x^2 + 2{,}6\,x + 1{,}12.$$



Laquelle des deux a lancé son poids le plus loin ?

On justifiera sa réponse.

Exercice 4. (5 points)

La terrasse de Sofia est rectangulaire et mesure 57,51 m² mais, entre sa longueur et sa largeur, il n'y a qu'un mètre d'écart.

Quelles sont les dimensions de sa terrasse ?

Exercice 5. (1 point)

Existe-t-il un nombre qui soustrait à son inverse donne 1 ?

On justifiera sa réponse.

Première ➡ Contrôle n° 1

Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Enoncé du sujet B

Exercice 1. (4 points)

On considère la fonction polynomiale $f(x) = 3x^2 - 18x + 30$

▶ 1. Donner, en détaillant, la forme canonique de f.

▶ 2. En déduire que, pour tout nombre x, $f(x) \geq 3$.

▶ 3. En déduire, sans faire de calcul, le nombre de racine(s) de la fonction f.

Exercice 2. (6 points)

▶ 1. Résoudre l'équation $81x^4 - 18x^2 + 1 = 0$.

▶ 2. Factoriser le polynôme $P(x) = 5x^2 + 8x - 4$.

▶ 3. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - x + 3}$ possède-t-elle des valeurs interdites ? Justifier.

Exercice 3. (4 points)

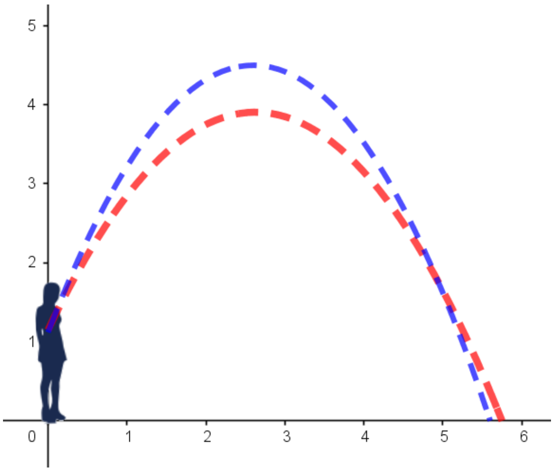
Ada et Maryam participent à une compétition de lancer de poids. On imagine qu'elles sont placées à l'origine du repère gradué en mètre.

Dans ce cas, le poids lancé par Maryam suit pour trajectoire la parabole

$$\mathcal{P}_1 : y = -0{,}5x^2 + 2{,}6\,x + 1{,}12.$$

Celui lancé par Ada suit pour trajectoire la parabole

$$\mathcal{P}_2 : y = -0{,}4x^2 + 2{,}1\,x + 1{,}15.$$



Laquelle des deux a lancé son poids le plus loin ?

On justifiera sa réponse.

Exercice 4. (5 points)

La terrasse de Sofia est rectangulaire et mesure 75,44 m² mais, entre sa longueur et sa largeur, il n'y a qu'un mètre d'écart.

Quelles sont les dimensions de sa terrasse ?

Exercice 5. (1 point)

Existe-t-il un nombre qui soustrait à son inverse donne 2 ?

On justifiera sa réponse.

Première ➡ Contrôle n° 1

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet A

Correction de l'exercice 1. (4 points)

On considère la fonction polynomiale $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$

▶ 1. Donner, en détaillant, la forme canonique de f.

▶ 2. En déduire que, pour tout nombre x, $f(x) \geq 3$.

▶ 3. En déduire, sans faire de calcul, le nombre de racine(s) de la fonction f.

Exercice 1.	**1.**	$f(x) = 3x^2 - 12x + 15$ $f(x) = 3(x^2 - 4x) + 15$ $f(x) = 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 15$ $f(x) = 3((x-2)^2 - 4) + 15$ $f(x) = 3(x-2)^2 - 12 + 15$ $f(x) = 3(x-2)^2 + 3$
	2.	Pour tout nombre x, $(x-2)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow \; 3(x-2)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow \; 3(x-2)^2 + 3 \geq 3$ et donc $f(x) \geq 3$
	3.	3 est la valeur minimale de f donc f n'a pas de racine.

Correction de l'exercice 2. (6 points)

▶ 1. Résoudre l'équation $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

▶ 2. Factoriser le polynôme $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

▶ 3. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - x + 2}$ possède-t-elle des valeurs interdites ? Justifier.

Exercice 2.	**1.**	Posons $X = x^2$, donc $X^2 = x^4$ Nous pouvons résoudre alors $16X^2 - 8X + 1 = 0$ $\Delta = 64 - 4 \times 16 = 0$, l'équation possède donc une seule solution : $X = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $X = x^2 = \frac{1}{4}$ Donc $x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$
	2.	On cherche les racines de $3x^2 + 2x - 1$ c'est à dire les solutions de l'équation $3x^2 + 2x - 1 = 0$ $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 > 0$, $P(x)$ possède donc deux racines : $x_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$ et $x_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$ alors $P(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
	3.	On cherche les racines de $3x^2 - x + 2$ $\Delta = 1 - 4 \times 6 = -23 < 0$, $3x^2 - x + 2$ ne possède pas de racine donc la fonction f ne possède pas de valeurs interdites.

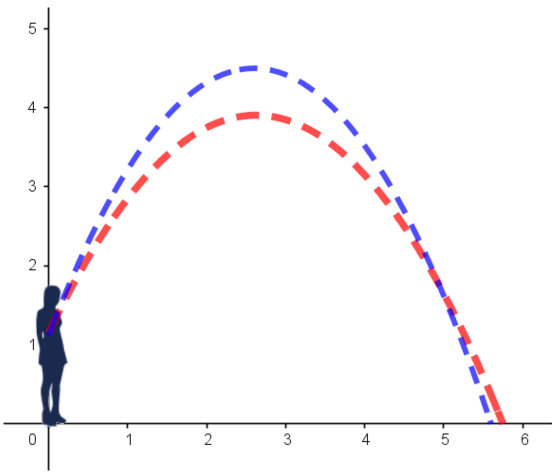
Correction de l'exercice 3. (4 points)

Ada et Maryam participent à une compétition de lancer de poids. On imagine qu'elles sont placées à l'origine du repère gradué en mètre.
Dans ce cas, le poids lancé par Maryam suit pour trajectoire la parabole

$$\mathcal{P}_1 : y = -0{,}4x^2 + 2{,}1\,x + 1{,}15.$$

Celui lancé par Ada suit pour trajectoire la parabole

$$\mathcal{P}_2 : y = -0{,}5x^2 + 2{,}6\,x + 1{,}12.$$



Laquelle des deux a lancé son poids le plus loin ? *On justifiera sa réponse.*

Exercice 3.

Le poids retombe sur terre au niveau de la racine des polynômes.

$$\mathcal{P}_1 : \ y = -0{,}4x^2 + 2{,}1\,x + 1{,}15$$
$$\Delta = 2{,}1^2 - 4 \times (-0{,}4) \times 1{,}15 = 6{,}25$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2{,}1 - 2{,}5}{-0{,}8} = \frac{-4{,}6}{-0{,}8} = 5{,}75 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2{,}1 + 2{,}5}{-0{,}8} = \frac{0{,}4}{-0{,}8} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\substack{exclu \\ car\ négative}}$$

Maryam a donc lancé son poids à 5,75 m.

$$\mathcal{P}_2 : \ y = -0{,}5x^2 + 2{,}6\,x + 1{,}12$$
$$\Delta = 2{,}6^2 - 4 \times (-0{,}5) \times 1{,}12 = 9$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2{,}6 - 3}{-1} = \frac{-5{,}6}{-1} = 5{,}6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2{,}6 + 3}{-1} = \frac{0{,}4}{-1} = \underbrace{-0{,}4}_{\substack{exclu \\ car\ négative}}$$

Ada a donc lancé son poids à 5,6 m.

C'est donc Maryam qui a lancé le plus loin.

Correction de l'exercice 4. (5 points)

La terrasse de Sofia est rectangulaire et mesure 57,51 m² mais, entre sa longueur et sa largeur, il n'y a qu'un mètre d'écart.

Quelles sont les dimensions de sa terrasse ?

Exercice 4.

Notons x, en mètre, l'une des dimensions de la terrasse de Sofia. L'autre longueur est donc égale à $x + 1$ mètre.

La surface de la terrasse est alors :

$x(x + 1)$.

Résolvons $x(x + 1) = 57{,}51$

$$x^2 + x = 57{,}51$$
$$x^2 + x - 57{,}51 = 0$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-57{,}51) \times 1 = 231{,}04$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{231{,}04}}{2} = \frac{-1 + 15{,}2}{2} = 7{,}1$$
$$\text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{231{,}04}}{2} = \frac{-1 - 15{,}2}{2} = \underbrace{-8{,}1}_{\substack{exclu \\ car\ négative}}$$

La terrasse de Sofia mesure donc $\mathbf{7,1}$ mètres sur $\mathbf{8,1}$ mètres.

Correction de l'exercice 5. (1 point)

Existe-t-il un nombre qui soustrait à son inverse donne 1 ?

On justifiera sa réponse.

Exercice 5.	Soit x un nombre non nul, L'inverse de x est $\frac{1}{x}$. Lorsque je soustrais le nombre à son inverse j'obtiens : $$\frac{1}{x} - x$$ Je résous alors : $$\frac{1}{x} - x = 1$$ $$\frac{1}{x} - x - 1 = 0$$ $$\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} = 0$$ $$\frac{1 - x^2 - x}{x} = 0$$ $$1 - x^2 - x = 0$$ $$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 1 + 4 = 5$$ Il y a deux racines : $$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$ $$\text{et} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$ **Il y a donc deux nombres qui soustrait à leur inverse donne 1.**

Première ➡ Contrôle n° 1

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet B

Correction de l'exercice 1. (4 points)

On considère la fonction polynomiale $f(x) = 3x^2 - 18x + 30$

▶ 1. Donner, en détaillant, la forme canonique de f.

▶ 2. En déduire que, pour tout nombre x, $f(x) \geq 3$.

▶ 3. En déduire, sans faire de calcul, le nombre de racine(s) de la fonction f.

Exercice 1.	**1.**	$f(x) = 3x^2 - 18x + 30$ $f(x) = 3(x^2 - 6x) + 30$ $f(x) = 3(x^2 - 6x + 9 - 9) + 30$ $f(x) = 3((x-3)^2 - 9) + 30$ $f(x) = 3(x-3)^2 - 27 + 30$ $f(x) = 3(x-3)^2 + 3$
	2.	Pour tout nombre x, $(x-3)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow\ 3(x-3)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow\ 3(x-3)^2 + 3 \geq 3$ et donc $f(x) \geq 3$
	3.	3 est la valeur minimale de f donc f n'a pas de racine.

Correction de l'exercice 2. (6 points)

▶ 1. Résoudre l'équation $81x^4 - 18x^2 + 1 = 0$.

▶ 2. Factoriser le polynôme $P(x) = 5x^2 + 8x - 4$.

▶ 3. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - x + 3}$ possède-t-elle des valeurs interdites ? Justifier.

Exercice 2.	**1.**	Posons $X = x^2$, donc $X^2 = x^4$ Nous pouvons résoudre alors $81X^2 - 18X + 1 = 0$ $\Delta = 18^2 - 4 \times 81 = 0$, l'équation possède donc une seule solution : $X = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{18}{162} = \dfrac{1}{9}$ $X = x^2 = \dfrac{1}{9}$ Donc $x = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}$ donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right\}$
	2.	On cherche les racines de $5x^2 + 8x - 4$ c'est à dire les solutions de l'équation $5x^2 + 8x - 4 = 0$ $\Delta = 64 - 4 \times (-4) \times 5 = 144 > 0$, $P(x)$ possède donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-8 - \sqrt{144}}{10} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-8 + \sqrt{144}}{10} = \dfrac{2}{5}$ alors $P(x) = 5(x + 2)\left(x - \frac{2}{5}\right)$
	3.	On cherche les racines de $2x^2 - x + 3$ $\Delta = 1 - 4 \times 6 = -23 < 0$, $2x^2 - x + 3$ ne possède pas de racine donc la fonction f ne possède pas de valeurs interdites.

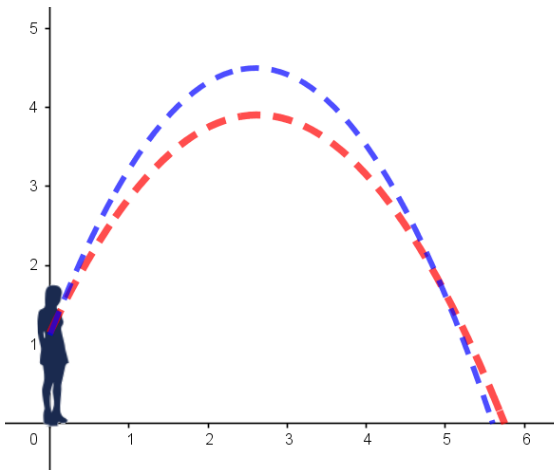
Correction de l'exercice 3. (4 points)

Ada et Maryam participent à une compétition de lancer de poids. On imagine qu'elles sont placées à l'origine du repère gradué en mètre. Dans ce cas, le poids lancé par Maryam suit pour trajectoire la parabole

$$\mathcal{P}_1 : y = -0{,}5x^2 + 2{,}6\,x + 1{,}12.$$

Celui lancé par Ada suit pour trajectoire la parabole

$$\mathcal{P}_2 : y = -0{,}4x^2 + 2{,}1\,x + 1{,}15.$$



Laquelle des deux a lancé son poids le plus loin ?

On justifiera sa réponse.

Exercice 3.

Le poids retombe sur terre au niveau de la racine des polynômes.

$$\mathcal{P}_1 : \ y = -0{,}5x^2 + 2{,}6\,x + 1{,}12$$

$$\Delta = 2{,}6^2 - 4 \times (-0{,}5) \times 1{,}12 = 9$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2{,}6 - 3}{-1} = \frac{-5{,}6}{-1} = 5{,}6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2{,}6 + 3}{-1} = \frac{0{,}4}{-1} = \underbrace{-0{,}4}_{\substack{exclu \\ car\ négative}}$$

Maryam a donc lancé son poids à 5,6 m.

$$\mathcal{P}_2 : \ y = -0{,}4x^2 + 2{,}1\,x + 1{,}15$$

$$\Delta = 2{,}1^2 - 4 \times (-0{,}4) \times 1{,}15 = 6{,}25$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2{,}1 - 2{,}5}{-0{,}8} = \frac{-4{,}6}{-0{,}8} = 5{,}75 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2{,}1 + 2{,}5}{-0{,}8} = \frac{0{,}4}{-0{,}8} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\substack{exclu \\ car\ négative}}$$

Ada a donc lancé son poids à 5,75 m.

C'est donc Ada qui a lancé le plus loin.

Correction de l'exercice 4. (5 points)

La terrasse de Sofia est rectangulaire et mesure 75,44 m² mais, entre sa longueur et sa largeur, il n'y a qu'un mètre d'écart.

Quelles sont les dimensions de sa terrasse ?

Exercice 4.

Notons x, en mètre, l'une des dimensions de la terrasse de Sofia. L'autre longueur est donc égale à $x + 1$ mètre.

La surface de la terrasse est alors :

$x(x + 1)$.

Résolvons $x(x + 1) = 57{,}51$

$$x^2 + x = 75{,}44$$

$$x^2 + x - 75{,}44 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-75{,}44) \times 1 = 302{,}76$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{302{,}76}}{2} = 8{,}2$$

$$\text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{302{,}76}}{2} = \underbrace{-9{,}2}_{\substack{exclu \\ car\ négative}}$$

La terrasse de Sofia mesure donc $\mathbf{8,2}$ mètres sur $\mathbf{9,2}$ mètres.

Correction de l'exercice 5. (1 point)

Existe-t-il un nombre qui soustrait à son inverse donne 2 ?
On justifiera sa réponse.

Exercice 5.	Soit x un nombre non nul, L'inverse de x est $\frac{1}{x}$. Lorsque je soustrais le nombre à son inverse j'obtiens : $$\frac{1}{x}-x$$ Je résous alors : $$\frac{1}{x}-x=2$$ $$\frac{1}{x}-x-2=0$$ $$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x}-\frac{2x}{x}=0$$ $$\frac{1-x^2-2x}{x}=0$$ $$1-x^2-2x=0$$ $$\Delta=(-2)^2-4\times(-1)\times 1=4+4=8$$ Il y a deux racines : $$x_1=\frac{2+\sqrt{8}}{-2}=\frac{2}{-2}-\frac{2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$$ $$\text{et}\quad x_2=\frac{2-\sqrt{8}}{-2}=\frac{2}{-2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}$$ **Il y a donc deux nombres qui soustrait à leur inverse donne 2.**