Lundi 18 novembre 2024
Première ➡ Contrôle n° 2
Spécialité Mathématiques

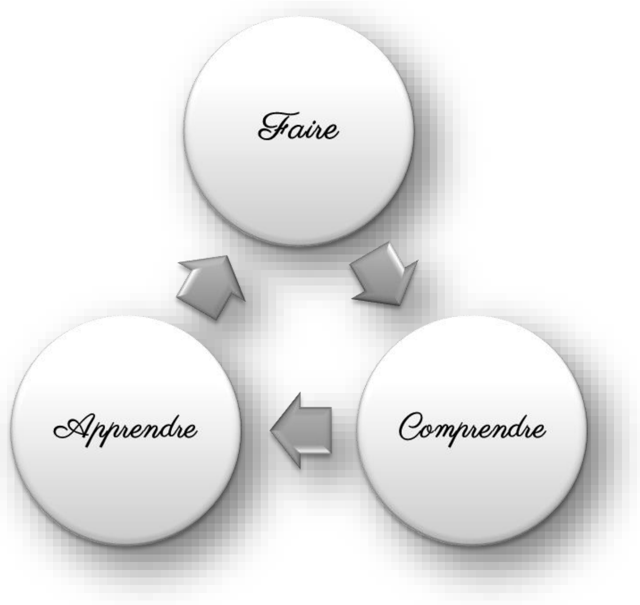


Table des matières

Première ➡ Contrôle n° 2

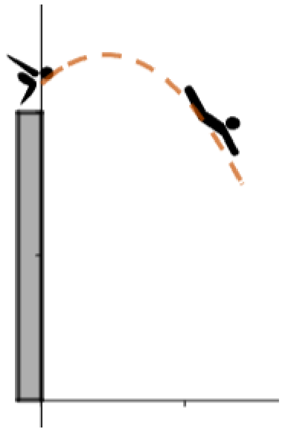
Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Enonce du sujet A

Exercice 1. (8 points)

Un plongeur saute du haut d'une plateforme. On admet que son centre de gravité décrit une parabole qui, dans un repère, est modélisée par la fonction h donnant $h(x)$ la hauteur, en mètres, du plongeur par rapport au niveau de l'eau en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètre :

$$h(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11.$$



▶ 1. A quelle distance du pied de la plateforme le plongeur trouve-t-il la surface de l'eau ? *On justifiera sa réponse.*

▶ 2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ? *On justifiera sa réponse.*

▶ 3. Un enfant lance un ballon en direction du plongeur.

a) Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole qui passe par les points de coordonnées $A(0;3)$, $B(1;4)$ et $C(5;6)$. Déterminer l'expression algébrique de la trajectoire du ballon.

b) La trajectoire du plongeur et du ballon vont-elles se croiser ? Si oui, à quelle hauteur ?

Exercice 2. (8 points)

▶ 1. On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 2n^2 + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer les quatre premiers termes.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

▶ 2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 1 + 5n^2$

a) Calculer les quatre premiers termes.

b) Pour tout entier naturel n, calculer $v_{n+1} - v_n$.

c) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

▶ 3. On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $w_n = \dfrac{n}{7^n}$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{w_{n+1}}{w_n}$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

▶ 4. On considère la suite (x_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_n = 1 - \dfrac{5}{n+1}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $x_{n+1} - x_n$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (x_n).

Exercice 3. (4 points)

▶ 1. Résoudre l'inéquation : $3x + 7 \leq \dfrac{5}{x+3}$

▶ 2. ***Qui suis-je ?***

Je suis une parabole. Mon minimum est atteint pour $x = -1$. J'admets 1 pour racine. L'un de mes points d'intersection avec la droite $y = x - 6$ a pour abscisse 0.

Première ➡ Contrôle n° 2

Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Enoncé du sujet B

Exercice 1. (8 points)

▶ 1. On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
a) Calculer les quatre premiers termes.
b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

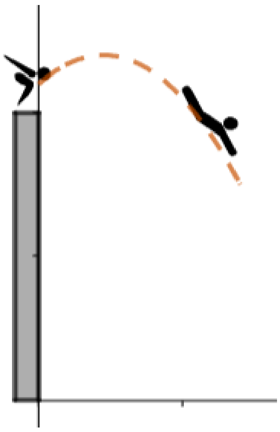
▶ 2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 5 + 2n^2$
a) Calculer les quatre premiers termes.
b) Pour tout entier naturel n, calculer $v_{n+1} - v_n$.
c) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

▶ 3. On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $w_n = \dfrac{n}{5^n}$
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{w_{n+1}}{w_n}$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

▶ 4. On considère la suite (x_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_n = 1 - \dfrac{4}{n+1}$.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $x_{n+1} - x_n$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (x_n).

Exercice 2. (8 points)

Un plongeur saute du haut d'une plateforme. On admet que son centre de gravité décrit une parabole qui, dans un repère, est modélisée par la fonction h donnant $h(x)$ la



hauteur, en mètres, du plongeur par rapport au niveau de l'eau en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètre :

$$h(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11.$$

▶ 1. A quelle distance du pied de la plateforme le plongeur trouve-t-il la surface de l'eau ? *On justifiera sa réponse.*

▶ 2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ? *On justifiera sa réponse.*

▶ 3. Un enfant lance un ballon en direction du plongeur.

a) Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole qui passe par les points de coordonnées $A(0;3)$, $B(1;4)$ et $C(5;6)$. Déterminer l'expression algébrique de la trajectoire du ballon.

b) La trajectoire du plongeur et du ballon vont-elles se croiser ? Si oui, à quelle hauteur ?

Exercice 3. (4 points)

▶ 1. Résoudre l'inéquation : $5x + 7 \geq \dfrac{3}{5x+9}$

▶ 2. ***Qui suis-je ?***

Je suis une parabole. Mon minimum est atteint pour $x = -2$. J'admets -1 pour racine. L'un de mes points d'intersection avec la droite $y = x + 9$ a pour abscisse 0.

Première → Contrôle n°2

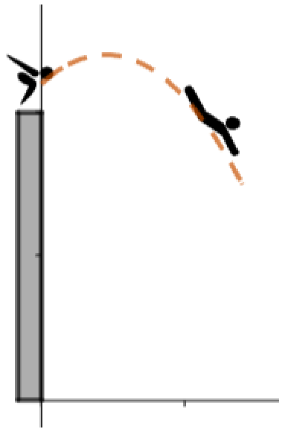
Spécialité Mathématiques

Correction du sujet A

Correction de l'exercice 1. (8 points)

Un plongeur saute du haut d'une plateforme. On admet que son centre de gravité décrit une parabole qui, dans un repère, est modélisée par la fonction h donnant $h(x)$ la hauteur, en mètres, du plongeur par rapport au niveau de l'eau en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètre :

$$h(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11.$$



▶ 1. A quelle distance du pied de la plateforme le plongeur trouve-t-il la surface de l'eau ? *On justifiera sa réponse.*

▶ 2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ? *On justifiera sa réponse.*

▶ 3. Un enfant lance un ballon en direction du plongeur.

a) Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole qui passe par les points de coordonnées $A(0;3)$, $B(1;4)$ et $C(5;6)$. Déterminer l'expression algébrique de la trajectoire du ballon.

b) La trajectoire du plongeur et du ballon vont-elles se croiser ? Si oui, à quelle hauteur ?

Exercice 1.

1.

Je résous $h(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11 = 0$$

$$\Delta = 0{,}9^2 - 4 \times (-0{,}2) \times 11 = 9{,}61 > 0$$

Il y a alors deux solutions

$$x_1 = \frac{-0{,}9 - \sqrt{9{,}61}}{-0{,}4} = 10 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0{,}9 + \sqrt{9{,}61}}{-0{,}4} = \underbrace{-5{,}5}_{\text{exclu}}$$

Le plongeur va toucher l'eau à l'abscisse $x = 10$ soit à 10 mètres du pied de la plateforme.

2.

$$h(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11$$

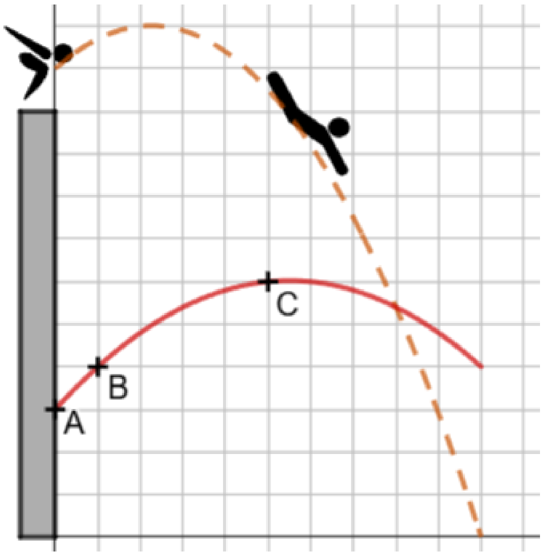
$a = -0.2 < 0$ la parabole est donc tournée vers le bas, elle admet donc un maximum en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-0{,}9}{-0{,}4} = 2{,}25$

x	0	$2{,}25$	$+\infty$
$h(x)$	↗	$12{,}0125$	↘

$h(2{,}25) = -0{,}2 \times 2{,}25^2 + 0{,}9 \times 2{,}25 + 11 = 12{,}0125$

Le plongeur va atteindre au maximum 12,0125 mètres de haut.

	3a.	La trajectoire du ballon est une parabole de la forme $$y = ax^2 + bx + c$$ Elle passe par les points de coordonnées $A(0;3)$, $B(1;4)$ et $C(5;6)$. $$\begin{cases} 3 = 0 + 0 + c \\ 4 = a + b + c \\ 6 = 25a + 5b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 4 = a + b + 3 \\ 6 = 25a + 5b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = 1 \\ 25a + 5b = 3 \end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - a \\ 25a + 5(1 - a) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - a \\ 25a + 5 - 5a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - a \\ 20a = -2 \end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - a \\ a = -\frac{2}{20} = -0{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - (-0{,}1) = 1{,}1 \\ a = -0{,}1 \end{cases}$$ J'en déduis que la parabole est $$y = -0{,}1x^2 + 1{,}1x + 3$$
	3b.	Je cherche à savoir si la trajectoire du plongeur et celle du ballon vont se croiser : $$\begin{aligned} -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11 &= -0{,}1x^2 + 1{,}1x + 3 \\ \Leftrightarrow 0 &= -0{,}1x^2 + 1{,}1x + 3 + 0{,}2x^2 - 0{,}9x - 11 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0{,}1x^2 + 0{,}2x - 8 \end{aligned}$$

		$$\Delta = 0{,}2^2 - 4 \times 0{,}1 \times (-8) = 3{,}24 > 0$$ Il y a deux solutions : $$x_1 = \frac{-0{,}2 - \sqrt{3{,}24}}{0{,}2} = \underbrace{-10}_{\text{exclu car négative}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0{,}2 + \sqrt{3{,}24}}{0{,}2} = 8$$ Le plongeur et le ballon vont se croiser pour $x = 8$. $h(8) = -0{,}2 \times 8^2 + 0{,}9 \times 8 + 11 = 5{,}4$ Ils vont se croiser à une hauteur de 5,4 mètres. 

Correction de l'exercice 2. (8 points)

▶ 1. On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 2n^2 + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
a) Calculer les quatre premiers termes.
b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

▶ 2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 1 + 5n^2$
a) Calculer les quatre premiers termes.
b) Pour tout entier naturel n, calculer $v_{n+1} - v_n$.
c) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

▶ 3. On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $w_n = \dfrac{n}{7^n}$
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{w_{n+1}}{w_n}$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

▶ 4. On considère la suite (x_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_n = 1 - \dfrac{5}{n+1}$.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $x_{n+1} - x_n$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (x_n).

Exercice 2.	**1a.**	$u_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n^2 + 1$ $u_1 = u_0 + 2 \times 0^2 + 1 = 5 + 1 = 6$ $u_2 = u_1 + 2 \times 1^2 + 1 = 6 + 2 + 1 = 9$ $u_3 = u_2 + 2 \times 2^2 + 1 = 9 + 8 + 1 = 18$
	1b.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + 2n^2 + 1 - u_n \\ &= 2n^2 + 1 \end{aligned}$ or, $2n^2 + 1 \geq 0$ donc, la suite (u_n) est croissante.
	2a.	$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + 5n^2$ $v_0 = 1 + 5 \times 0^2 = 1$ $v_1 = 1 + 5 \times 1^2 = 6$ $v_2 = 1 + 5 \times 2^2 = 21$ $v_3 = 1 + 5 \times 3^2 = 46$
	2b.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 1 + 5(n+1)^2 - (1 + 5n^2) \\ &= 1 + 5(n^2 + 2n + 1) - 1 - 5n^2 \\ &= 1 + 5n^2 + 10n + 5 - 1 - 5n^2 \\ &= 10n + 5 \end{aligned}$
	2c.	$\forall n \in \mathbb{N}$, $10n + 5 \geq 0$ J'en déduis que la suite (v_n) est croissante.
	3a.	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{n}{7^n} > 0$ $\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{\frac{n+1}{7^{n+1}}}{\frac{n}{7^n}} \\ &= \frac{n+1}{7^{n+1}} \times \frac{7^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{7n} \end{aligned}$
	3b.	$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $7n - (n+1) = 7n - n - 1 = 6n - 1$ $\begin{aligned} n &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 6n &\geq 6 \\ \Leftrightarrow 6n - 1 &\geq 5 \end{aligned}$

		J'en déduis que $6n-1 \geq 0$ et donc $7n \geq n+1$ Par conséquent, $$\frac{n+1}{7n} \leq 1$$ La suite (w_n) est donc décroissante.
	4a.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= 1-\frac{5}{(n+1)+1}-\left(1-\frac{5}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{5}{n+2}-1+\frac{5}{n+1} \\ &= -\frac{5}{n+2}+\frac{5}{n+1} \\ &= \frac{-5(n+1)}{(n+2)(n+1)}+\frac{5(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{-5n-5+5n+10}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{5}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$
	4b.	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{5}{(n+2)(n+1)} \geq 0$ J'en déduis que la suite (x_n) est croissante.

Correction de l'exercice 3. (4 points)

▶ 1. Résoudre l'inéquation : $3x+7 \leq \frac{5}{x+3}$

▶ 2. ***Qui suis-je ?***

Je suis une parabole. Mon minimum est atteint pour $x=-1$. J'admets 1 pour racine. L'un de mes points d'intersection avec la droite $y=x-6$ a pour abscisse 0.

Exercice 3.	**1.**	$$\begin{aligned} 3x+7 &\leq \frac{5}{x+3} \\ 3x+7-\frac{5}{x+3} &\leq 0 \\ \frac{(3x+7)(x+3)-5}{x+3} &\leq 0 \\ \frac{3x^2+9x+7x+21-5}{x+3} &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{3x^2+16x+16}{x+3} \leq 0$$

Signe de $3x^2+16x+16$:

$\Delta = 16^2 - 4\times 3\times 16 = 64 > 0$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-16-8}{6} = -4$$

$$x_2 = \frac{-16+8}{6} = -\frac{4}{3}$$

De plus, $a = 3 > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut.

Signe de $x+3$:

$$x+3>0$$

$$\Leftrightarrow x > -3$$

x	$-\infty$		-4		-3		$\frac{-4}{3}$		$+\infty$
$3x^2+16x+16$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\frac{3x^2+16x+16}{x+3}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc $]-\infty;-4] \cup \left]-3;-\frac{4}{3}\right]$.

2.

Je suis une parabole.	$y = ax^2+bx+c$
Mon minimum est atteint pour $x=-1$.	$-\frac{b}{2a} = -1$ $\Leftrightarrow -b = -2a$ $\Leftrightarrow b = 2a$ $y = ax^2+2ax+c$
J'admets 1 pour racine.	Si $x=1$ alors $y=0$ $0 = a+2a+c$ $\Leftrightarrow 3a+c=0$ $\Leftrightarrow c=-3a$ $y = ax^2+2ax-3a$
L'un de mes points d'intersection avec la droite $y=x-6$ a pour abscisse 0.	Si $x=0$ alors $y=-6$ $-6 = 0+0-3a$ $\Leftrightarrow -3a=-6$ $\Leftrightarrow a = \frac{-6}{-3} = 2$

La parabole recherchée est donc $y = 2x^2+4x-6$

Correction de l'exercice 1. (8 points)

▶ 1. On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   a) Calculer les quatre premiers termes.
   b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

▶ 2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 5 + 2n^2$
   a) Calculer les quatre premiers termes.
   b) Pour tout entier naturel n, calculer $v_{n+1} - v_n$.
   c) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

▶ 3. On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $w_n = \dfrac{n}{5^n}$
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{w_{n+1}}{w_n}$.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

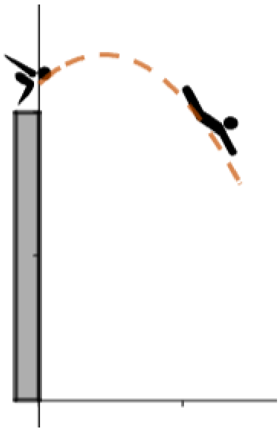
▶ 4. On considère la suite (x_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_n = 1 - \dfrac{4}{n+1}$.
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $x_{n+1} - x_n$.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (x_n).

Exercice 1.	**1a.**	$u_0 = 4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 2$ $u_1 = u_0 + 3 \times 0^2 + 2 = 4 + 2 = 6$ $u_2 = u_1 + 3 \times 1^2 + 2 = 6 + 3 + 2 = 11$ $u_3 = u_2 + 3 \times 2^2 + 2 = 11 + 12 + 2 = 25$
	1b.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + 3n^2 + 2 - u_n \\ &= 3n^2 + 2 \end{aligned}$ or, $3n^2 + 2 \geq 0$ donc, la suite (u_n) est croissante.
	2a.	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 5 + 2n^2$ $v_0 = 5 + 2 \times 0^2 = 5$ $v_1 = 5 + 2 \times 1^2 = 7$ $v_2 = 5 + 2 \times 2^2 = 13$ $v_3 = 5 + 2 \times 3^2 = 23$
	2b.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 5 + 2(n+1)^2 - (5 + 2n^2) \\ &= 5 + 2(n^2 + 2n + 1) - 5 - 2n^2 \end{aligned}$

		$$\begin{aligned} &= 5+2n^2+4n+2-5-2n^2 \\ &= 4n+2 \end{aligned}$$
	2c.	$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 4n+2 \geq 0$ J'en déduis que la suite (v_n) est croissante.
	3a.	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{n}{5^n} > 0$ $$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} \\ &= \frac{n+1}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{5n} \end{aligned}$$
	3b.	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 5n-(n+1) = 5n-n-1 = 4n-1$ $$\begin{aligned} n &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 4n &\geq 4 \\ \Leftrightarrow 4n-1 &\geq 3 \end{aligned}$$ J'en déduis que $4n-1 \geq 0$ et donc $5n \geq n+1$ Par conséquent, $$\frac{n+1}{5n} \leq 1$$ La suite (w_n) est donc décroissante.
	4a.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= 1-\frac{4}{(n+1)+1}-\left(1-\frac{4}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{4}{n+2}-1+\frac{4}{n+1} \\ &= -\frac{4}{n+2}+\frac{4}{n+1} \\ &= \frac{-4(n+1)}{(n+2)(n+1)}+\frac{4(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{-4n-4+4n+8}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{4}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$
	4b.	$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{4}{(n+2)(n+1)} \geq 0$ J'en déduis que la suite (x_n) est croissante.

Correction de l'exercice 2. (8 points)

Un plongeur saute du haut d'une plateforme. On admet que son centre de gravité décrit une parabole qui, dans un repère, est modélisée par la fonction h donnant $h(x)$ la hauteur, en mètres, du plongeur par rapport au niveau de l'eau en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètre :



$$h(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11.$$

▶1. A quelle distance du pied de la plateforme le plongeur trouve-t-il la surface de l'eau ? *On justifiera sa réponse.*

▶2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ? *On justifiera sa réponse.*

▶3. Un enfant lance un ballon en direction du plongeur.

a) Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole qui passe par les points de coordonnées $A(0;3)$, $B(1;4)$ et $C(5;6)$. Déterminer l'expression algébrique de la trajectoire du ballon.

b) La trajectoire du plongeur et du ballon vont-elles se croiser ? Si oui, à quelle hauteur ?

Exercice 1.

1.

Je résous $h(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11 = 0$$

$$\Delta = 0{,}9^2 - 4 \times (-0{,}2) \times 11 = 9{,}61 > 0$$

Il y a alors deux solutions

$$x_1 = \frac{-0{,}9 - \sqrt{9{,}61}}{-0{,}4} = 10 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0{,}9 + \sqrt{9{,}61}}{-0{,}4} = \underbrace{-5{,}5}_{\text{exclu}}$$

Le plongeur va toucher l'eau à l'abscisse $x = 10$ soit à 10 mètres du pied de la plateforme.

2.

$$h(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11$$

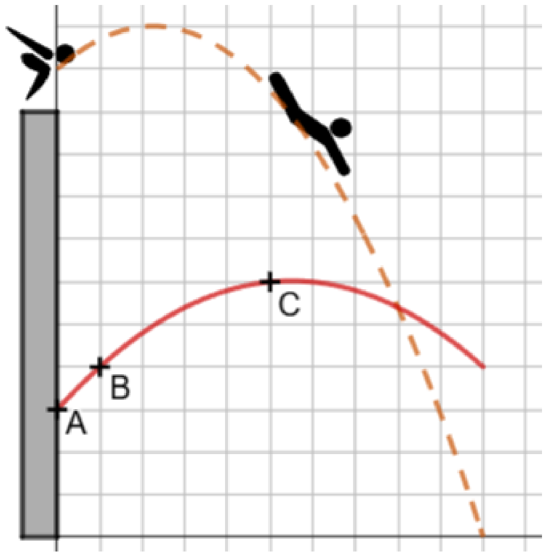
$a = -0.2 < 0$ la parabole est donc tournée vers le bas, elle admet donc un maximum en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-0{,}9}{-0{,}4} = 2{,}25$

x	0	$2{,}25$	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	$12{,}0125$	$\searrow$

$h(2{,}25) = -0{,}2 \times 2{,}25^2 + 0{,}9 \times 2{,}25 + 11 = 12{,}0125$

Le plongeur va atteindre au maximum 12,0125 mètres de haut.

	3a.	La trajectoire du ballon est une parabole de la forme $$y = ax^2 + bx + c$$ Elle passe par les points de coordonnées $A(0;3)$, $B(1;4)$ et $C(5;6)$. $$\begin{cases} 3 = 0 + 0 + c \\ 4 = a + b + c \\ 6 = 25a + 5b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 4 = a + b + 3 \\ 6 = 25a + 5b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = 1 \\ 25a + 5b = 3 \end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - a \\ 25a + 5(1 - a) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - a \\ 25a + 5 - 5a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - a \\ 20a = -2 \end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - a \\ a = -\dfrac{2}{20} = -0{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 - (-0{,}1) = 1{,}1 \\ a = -0{,}1 \end{cases}$$ J'en déduis que la parabole est $$y = -0{,}1x^2 + 1{,}1x + 3$$
	3b.	Je cherche à savoir si la trajectoire du plongeur et celle du ballon vont se croiser : $$\begin{aligned} -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 11 &= -0{,}1x^2 + 1{,}1x + 3 \\ \Leftrightarrow 0 &= -0{,}1x^2 + 1{,}1x + 3 + 0{,}2x^2 - 0{,}9x - 11 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0{,}1x^2 + 0{,}2x - 8 \end{aligned}$$

		$$\Delta = 0{,}2^2 - 4 \times 0{,}1 \times (-8) = 3{,}24 > 0$$ Il y a deux solutions : $$x_1 = \frac{-0{,}2 - \sqrt{3{,}24}}{0{,}2} = \underbrace{-10}_{\text{exclu car négative}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0{,}2 + \sqrt{3{,}24}}{0{,}2} = 8$$ Le plongeur et le ballon vont se croiser pour $x = 8$. $h(8) = -0{,}2 \times 8^2 + 0{,}9 \times 8 + 11 = 5{,}4$ Ils vont se croiser à une hauteur de 5,4 mètres. 

Correction de l'exercice 3. (4 points)

▶ 1. Résoudre l'inéquation : $5x + 7 \geq \dfrac{3}{5x+9}$

▶ 2. ***Qui suis-je ?***
Je suis une parabole. Mon minimum est atteint pour $x = -2$. J'admets -1 pour racine. L'un de mes points d'intersection avec la droite $y = x + 9$ a pour abscisse 0.

Exercice 3.	**1.**	$$\begin{aligned} 5x + 7 &\geq \frac{3}{5x+9} \\ 5x + 7 - \frac{3}{5x+9} &\geq 0 \\ \frac{(5x+7)(5x+9) - 3}{5x+9} &\geq 0 \\ \frac{25x^2 + 45x + 35x + 63 - 3}{5x+9} &\geq 0 \\ \frac{25x^2 + 80x + 60}{5x+9} &\geq 0 \end{aligned}$$

Signe de $25x^2 + 80x + 60$:

$\Delta = 80^2 - 4 \times 25 \times 60 = 400 > 0$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-80 - 20}{50} = -2$$

$$x_2 = \frac{-80 + 20}{50} = -1{,}2$$

De plus, $a = 25 > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut.

Signe de $5x + 9$:

$$5x + 9 > 0$$
$$\Leftrightarrow 5x > -9$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{9}{5}$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-9}{5}$		$-1{,}2$		$+\infty$
$25x^2+80x+60$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$5x+9$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\frac{25x^2+80x+60}{5x+9}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc $\left[-2; -\frac{9}{5}\right[\cup [-1{,}2; +\infty[$.

2.

Je suis une parabole.	$y = ax^2 + bx + c$
Mon minimum est atteint pour $x = -2$.	$-\frac{b}{2a} = -2$ $\Leftrightarrow -b = -4a$ $\Leftrightarrow b = 4a$ $y = ax^2 + 4ax + c$
J'admets -1 pour racine.	Si $x = -1$ alors $y = 0$ $0 = a - 4a + c$ $\Leftrightarrow -3a + c = 0$ $\Leftrightarrow c = 3a$ $y = ax^2 + 4ax + 3a$
L'un de mes points d'intersection avec la droite $y = x + 9$ a pour abscisse 0.	Si $x = 0$ alors $y = 9$ $9 = 0 + 0 + 3a$ $\Leftrightarrow 3a = 9$ $\Leftrightarrow a = \frac{9}{3} = 3$

La parabole recherchée est donc $y = 3x^2 + 12x + 9$