Lundi 3 mars 2025

Première ➡ Devoir à rédiger n° 3

Spécialité Mathématiques

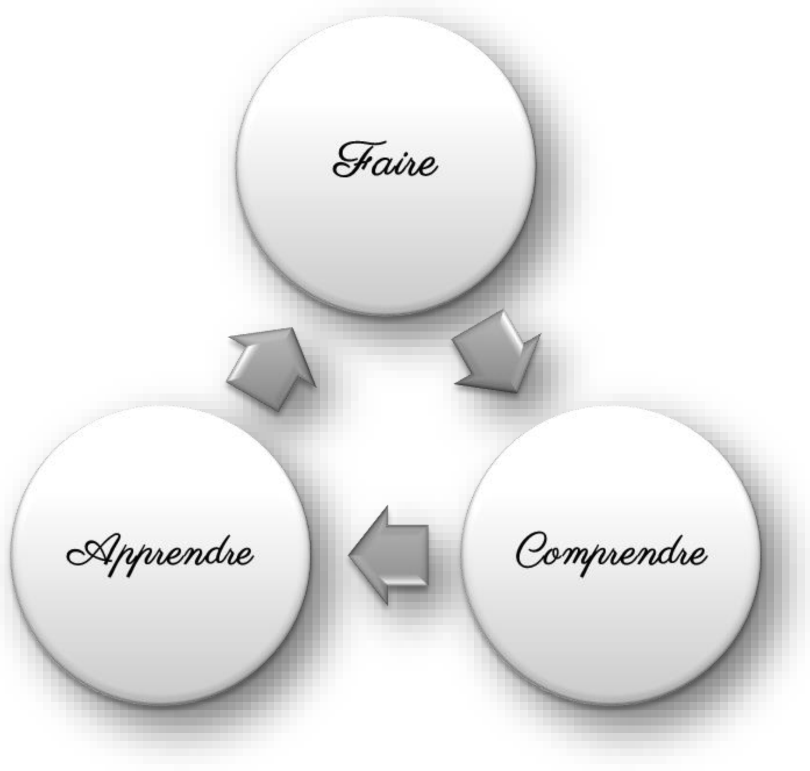


Table des matières

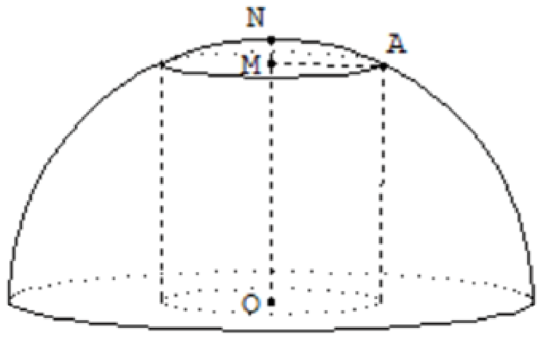
Première ➡ Devoir à rédiger n° 3
Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1.

On considère une demi-sphère de centre O et de 6 cm de rayon.

Le point M est un point mobile sur le segment $[ON]$. On inscrit dans la sphère un cylindre $\mathcal{P}$ de hauteur $[OM]$ et de rayon de disque de base $[AM]$ où A est un point de la sphère.



Posons $OM = x$ et notons $f(x)$ le volume du cylindre $\mathcal{P}$.

1 Dans quel intervalle varie x ?

2 En détaillant vos calculs, exprimer $f(x)$ le volume du cylindre $\mathcal{P}$ en fonction de x.

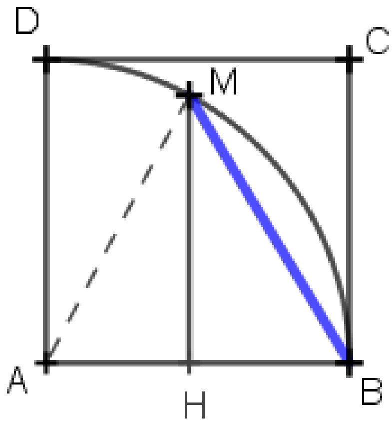
3 Existe-t-il une position de M qui donne un volume maximal ? Si oui, combien vaut ce volume maximal ? On justifiera avec soin sa réponse.

Exercice 2.

$ABCD$ est un carré de côté 1.

M est un point mobile sur le quart de cercle de rayon $[AB]$.

On étudie la longueur MB.



Posons $x = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM})$ angle en radian.

Le point H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

1 Dans quel intervalle varie x ?

2 Démontrer que la longueur MB peut s'écrire

$$MB = \sqrt{2 - 2\cos(x)}$$

3 Déterminer la position de M pour que la longueur MB soit égale à 0,5. *On donnera une valeur approchée de l'angle au degré près.*

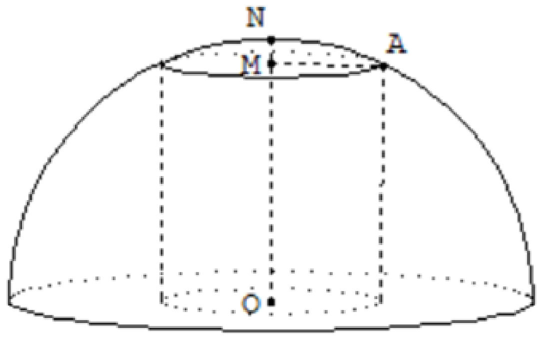
Première → Devoir à rédiger n° $\boxed{3}$

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1.

On considère une demi-sphère de centre O et de 6 cm de rayon.
Le point M est un point mobile sur le segment $[ON]$. On inscrit dans la sphère un cylindre $\mathcal{P}$ de hauteur $[OM]$ et de rayon de disque de base $[AM]$ où A est un point de la sphère.
Posons $OM = x$ et notons $f(x)$ le volume du cylindre $\mathcal{P}$.



$\boxed{1}$ Dans quel intervalle varie x ?
$\boxed{2}$ En détaillant vos calculs, exprimer $f(x)$ le volume du cylindre $\mathcal{P}$ en fonction de x.
$\boxed{3}$ Existe-t-il une position de M qui donne un volume maximal ? Si oui, combien vaut ce volume maximal ? On justifiera avec soin sa réponse.

Exercice 1.	$\boxed{1}$	$x \in [0; 6]$ car le point M peut se déplacer de O à N.
	$\boxed{2}$	$f(x) = \pi R^2 \times h$ $f(x) = \pi \times AM^2 \times OM$ Dans le triangle OMA rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $AM^2 = OA^2 - OM^2 = 6^2 - x^2 = 36 - x^2$ J'en déduis que $f(x) = \pi \times (36 - x^2) \times x$ $f(x) = 36\pi\, x - \pi x^3$

La fonction f est dérivable sur $[0;6]$ comme somme de fonctions dérivables.
$\forall x \in [0;6], f(x) = 36\pi\, x - \pi x^3$
$f'(x) = 36\pi - 3\pi x^2$

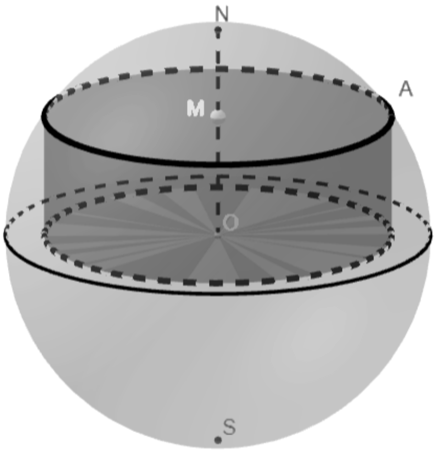
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 36\pi - 3\pi x^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow -3\pi x^2 > -36\pi \\ &\Leftrightarrow x^2 < \frac{-36\pi}{-3\pi} \\ &\Leftrightarrow x^2 < 12 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{12} < x < \sqrt{12} \end{aligned}$$

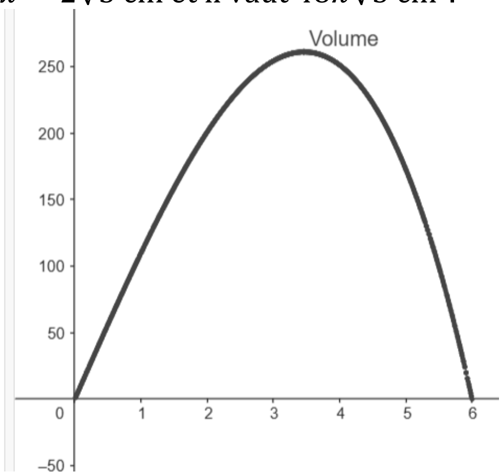
or $x \in [0;6]$ donc $0 < x < 2\sqrt{3}$

x	0		$2\sqrt{3}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$48\pi\sqrt{3}$	$\searrow$	0

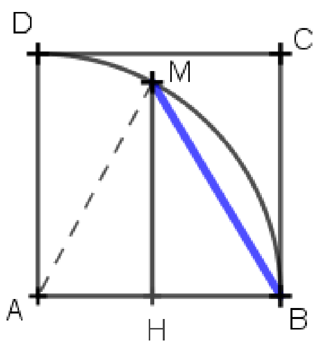
3

$f(2\sqrt{3}) = 36\pi \times 2\sqrt{3} - \pi \times (2\sqrt{3})^3$
$f(2\sqrt{3}) = 72\pi\sqrt{3} - \pi \times 8 \times 3\sqrt{3}$
$f(2\sqrt{3}) = 72\pi\sqrt{3} - 24\pi\sqrt{3}$
$f(2\sqrt{3}) = 48\pi\sqrt{3}$
Le volume du cylindre est maximal pour $x = 2\sqrt{3}$ cm et il vaut $48\pi\sqrt{3}$ cm^3.





Correction de l'exercice 2.



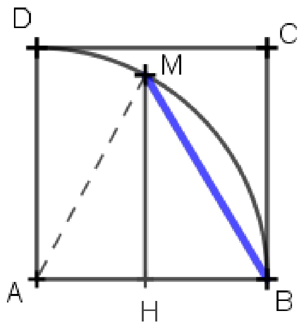
$ABCD$ est un carré de côté 1.
M est un point mobile sur le quart de cercle de rayon $[AB]$.
On étudie la longueur MB.

Posons $x = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM})$ angle en radian.
Le point H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

1 Dans quel intervalle varie x ?
2 Démontrer que la longueur MB peut s'écrire

$$MB = \sqrt{2 - 2\cos(x)}$$

3 Déterminer la position de M pour que la longueur MB soit égale à 0,5. *On donnera une valeur approchée de l'angle au degré près.*

Exercice 2.	1	$x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ car le point M peut se déplacer de B à D.
	2	Pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,  $MH = \sin(x)$ $AH = \cos(x)$ et donc $HB = 1 - \cos(x)$ H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB) donc le triangle MBH est rectangle en H, donc : $MB^2 = MH^2 + HB^2$ $MB^2 = \sin^2(x) + (1 - \cos(x))^2$ $MB^2 = \sin^2(x) + 1 - 2\cos(x) + \cos^2(x)$ or $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $MB^2 = 1 + 1 - 2\cos(x)$ donc $MB = \sqrt{2 - 2\cos(x)}$
	3	$MB = \sqrt{2 - 2\cos(x)} = 0{,}5$ $2 - 2\cos(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $2 - 2\cos(x) = \frac{1}{4}$ $-2\cos(x) = \frac{1}{4} - 2$ $-2\cos(x) = \frac{-7}{4}$ $\cos(x) = \frac{-7}{4} \times \frac{1}{-2}$ $\cos(x) = \frac{7}{8}$ $x \approx \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$ $x = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right) \approx 28{,}955 \approx 29°$