Devoir à rédiger n° 4 – Pour lundi 28 avril 2025
Première Spécialité Mathématiques

Exercice n°1

Un joueur lance une pièce parfaitement bien équilibrée trois fois de suite.

1 Donner une représentation de la situation.

2 On considère l'algorithme suivant :

```
from random import *
a=randint(1,2)
b=randint(1,2)
if a!=b:
    print("Perte de 20€")
else:
    c=randint(1,2)
    if a!=c:
        print("Perte de 20€")
    else:
        print("Gain de 30€")
```

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain (positif ou négatif) du joueur.

a) Expliquer les règles du jeu.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Le jeu est-il équitable ?

d) Combien le joueur devrait-il perdre pour que le jeu soit équitable ? Justifier.

Exercice n°2

Partie A

Soit la fonction f définie, pour tout réel $x \in [2\,;+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{x^2-13x+30}{x^2+11x+30}$:

1 Résoudre, dans $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=0$.

2 a) On suppose f dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que

$$\forall x \in [2\,;+\infty[, f'(x)=\frac{24(x^2-30)}{(x^2+11x+30)^2}$$

b) En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

3 A l'aide de la calculatrice ou d'un algorithme, conjecturer pour quelle valeur de x la fonction f dépassera la valeur 0,5.

Partie B

Une boîte contient 6 boules rouges et n boules bleues. Un jeu consiste à tirer successivement, sans remise, 2 boules de la boîte. Si les 2 boules ont la même couleur, le joueur gagne 1 euro, si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1 euro.

1 **Dans cette question, on suppose $n=4$, o**n note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Ce jeu est-il équitable ?

2 **Dans cette question, l'entier n est quelconque supérieur ou égal à 2 :**

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, démontrer que $E(X)=f(n)$ où f est la fonction de la partie A.

b) Quel doit être le nombre de boules bleues pour que le jeu soit équitable ?

c) Pour quel nombre de boules bleues la perte sera maximale en moyenne ?