Lundi 28 avril 2025

Première ➡ Devoir à rédiger n° 4

Spécialité Mathématiques

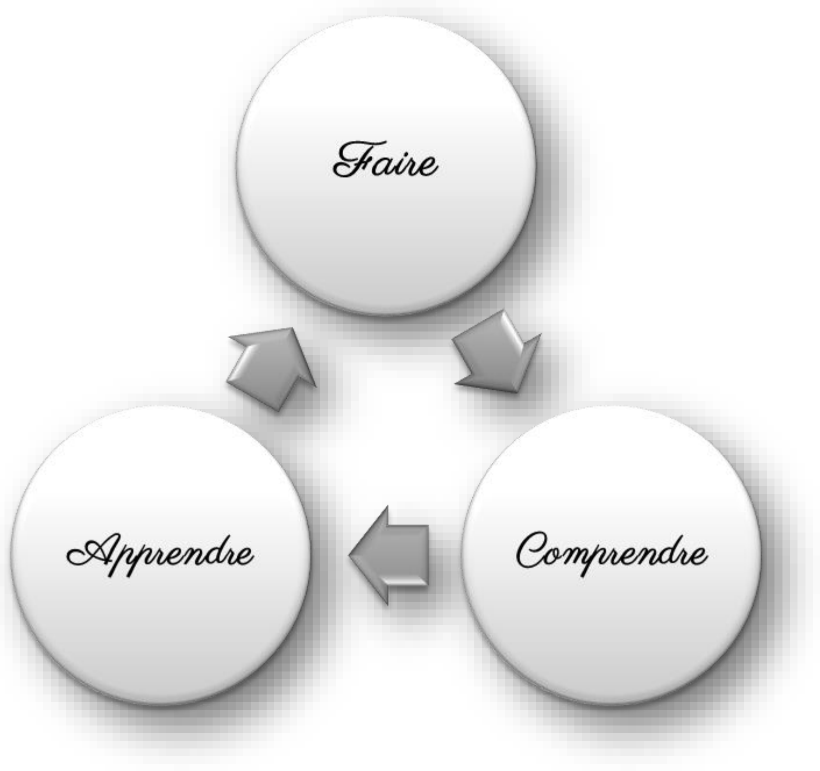


Table des matières

Première ➡ Devoir à rédiger n° 4

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1.

Un joueur lance une pièce parfaitement bien équilibrée trois fois de suite.

1. Donner une représentation de la situation.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
from random import *
a=randint(1,2)
b=randint(1,2)
if a!=b:
    print("Perte de 20€")
else:
    c=randint(1,2)
    if a!=c:
        print("Perte de 20€")
    else:
   print("Gain de 30€")
```

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain (positif ou négatif) du joueur.

a) Expliquer les règles du jeu.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Le jeu est-il équitable ?

d) Combien le joueur devrait-il perdre pour que le jeu soit équitable ? Justifier.

Exercice 2.

Partie A

Soit la fonction f définie, pour tout réel $x \in [2\,;+\infty[$, par $f(x) = \dfrac{x^2 - 13x + 30}{x^2 + 11x + 30}$:

1. Résoudre, dans $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$.
2. a) On suppose f dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que

$$\forall x \in [2\,;+\infty[, f'(x) = \frac{24(x^2 - 30)}{(x^2 + 11x + 30)^2}$$

   b) En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

3. A l'aide de la calculatrice ou d'un algorithme, conjecturer pour quelle valeur de x la fonction f dépassera la valeur 0,5.

Partie B

Une boîte contient 6 boules rouges et n boules bleues. Un jeu consiste à tirer successivement, sans remise, 2 boules de la boîte. Si les 2 boules ont la même couleur, le joueur gagne 1 euro, si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1 euro.

1. **Dans cette question, on suppose $n = 4$, o**n note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe le gain algébrique du joueur.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Ce jeu est-il équitable ?

2. **Dans cette question, l'entier n est quelconque supérieur ou égal à 2 :**

   a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, démontrer que $E(X) = f(n)$ où f est la fonction de la partie A.

   b) Quel doit être le nombre de boules bleues pour que le jeu soit équitable ?

   c) Pour quel nombre de boules bleues la perte sera maximale en moyenne ?

Première → Devoir à rédiger n° 4

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1.

Un joueur lance une pièce parfaitement bien équilibrée trois fois de suite.

1. Donner une représentation de la situation.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
from random import *
a=randint(1,2)
b=randint(1,2)
if a!=b:
    print("Perte de 20€")
else:
    c=randint(1,2)
    if a!=c:
        print("Perte de 20€")
    else:
   print("Gain de 30€")
```

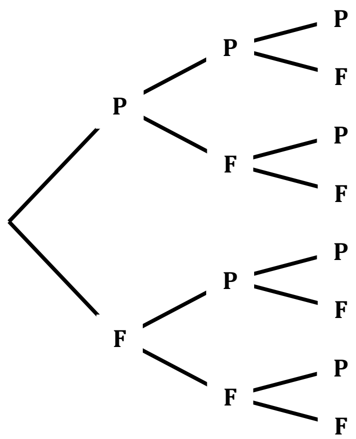
On appelle X la variable aléatoire donnant le gain (positif ou négatif) du joueur.

a) Expliquer les règles du jeu.
b) Donner la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Le jeu est-il équitable ?
d) Combien le joueur devrait-il perdre pour que le jeu soit équitable ? Justifier.

Exercice 1.

1

On peut représenter la situation par un arbre.



2 a

D'après l'algorithme, en utilisant l'arbre précédent pour avoir tous les cas possibles :

PPP	**Gain de 30€**
PPF	**Perte de 20€**
PFP	**Perte de 20€**
PFF	**Perte de 20€**
FPP	**Perte de 20€**
FPF	**Perte de 20€**
FFP	**Perte de 20€**
FFF	**Gain de 30€**

Cet algorithme permet de simuler le jeu qui, lors d'un lancer de 3 pièces équilibrées, permet de gagner 30 euros si les trois pièces tombent du même côté et de perdre 20 euros sinon.

2 b

La variable aléatoire X prend comme valeur : $+30$ € ou -20 €

$P(X = 30 \text{ €}) = P(\{PPP\} \text{ ou } \{FFF\})$

$$P(X = 30 \text{ €}) = P(PPP) + P(FFF) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

On peut en déduire que

$$P(X = -20 \text{ €}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

On peut alors résumer la loi de probabilité de X ci-dessous :

$\boldsymbol{X = k}$	$\boldsymbol{+30}$ **€**	$\boldsymbol{-20}$ **€**
$\boldsymbol{P(X = k)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

2 c

$$E(X) = 30 \times \frac{1}{4} - 20 \times \frac{3}{4} = \frac{30 - 60}{4} = -\frac{30}{4} = -7{,}5$$

Ce jeu n'est pas équitable. Si on joue très longtemps, on peut espérer perdre 7,5 euros en moyenne par partie.

2 d

Notons xn la valeur en euros que le joueur devrait perdre pour que le jeu soit équitable.

$\boldsymbol{X = k}$	$\boldsymbol{+30}$ **€**	$\boldsymbol{-x}$ **€**
$\boldsymbol{P(X = k)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$E(X) = 0$$
$$30 \times \frac{1}{4} - x \times \frac{3}{4} = 0$$
$$\frac{-3x}{4} = -\frac{30}{4}$$
$$-3x = -30$$
$$x = \frac{-30}{-3} = 10$$

Pour que le jeu devienne équitable, il faut que le joueur perde 10 euros lorsque les trois pièces ne sont pas identiques.

Correction de l'exercice 2.

Partie A

Soit la fonction f définie, pour tout réel $x \in [2\,;+\infty[$, par $f(x) = \dfrac{x^2 - 13x + 30}{x^2 + 11x + 30}$:

1. Résoudre, dans $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$.
2. a) On suppose f dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que

$$\forall x \in [2\,;+\infty[, f'(x) = \frac{24(x^2 - 30)}{(x^2 + 11x + 30)^2}$$

   b) En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

3. A l'aide de la calculatrice ou d'un algorithme, conjecturer pour quelle valeur de x la fonction f dépassera la valeur 0,5.

Partie B

Une boîte contient 6 boules rouges et n boules bleues. Un jeu consiste à tirer successivement, sans remise, 2 boules de la boîte. Si les 2 boules ont la même couleur, le joueur gagne 1 euro, si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1 euro.

1 **Dans cette question, on suppose $n = 4$, o**n note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Ce jeu est-il équitable ?

2 **Dans cette question, l'entier n est quelconque supérieur ou égal à 2 :**

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, démontrer que $E(X) = f(n)$ où f est la fonction de la partie A.

b) Quel doit être le nombre de boules bleues pour que le jeu soit équitable ?

c) Pour quel nombre de boules bleues la perte sera maximale en moyenne ?

<table>
<tr>
<td rowspan="2">**Exercice 2. Partie A.**</td>
<td colspan="2">1</td>
<td>

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 13x + 30}{x^2 + 11x + 30} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \times 30 = 169 - 120 = 49 > 0$$

Il y a alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{13 - 7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{13 + 7}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions 3 et 10.

</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>*a*</td>
<td>

$\forall x \in [2\,; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 13x + 30}{x^2 + 11x + 30} = \frac{u}{v}$$

$$u = x^2 - 13x + 30 \qquad v = x^2 + 11x + 30$$

$$u' = 2x - 13 \qquad v' = 2x + 11$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 13)(x^2 + 11x + 30) - (x^2 - 13x + 30)(2x + 11)}{(x^2 + 11x + 30)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 22x^2 + 60x - 13x^2 - 143x - 390 - (x^2 - 13x + 30)(2x + 11)}{(x^2 + 11x + 30)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 - 83x - 390 - (2x^3 + 11x^2 - 26x^2 - 143x + 60x + 330)}{(x^2 + 11x + 30)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 - 83x - 390 - (2x^3 - 15x^2 - 83x + 330)}{(x^2 + 11x + 30)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 - 83x - 390 - 2x^3 + 15x^2 + 83x - 330}{(x^2 + 11x + 30)^2}$$

$$f'(x) = \frac{24x^2 - 720}{(x^2 + 11x + 30)^2} = \frac{24(x^2 - 30)}{(x^2 + 11x + 30)^2}$$

</td>
</tr>
</table>

b

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{24(x^2-30)}{(x^2+11x+30)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 24(x^2-30) > 0 \text{ car } (x^2+11x+30)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 30$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt{30} \text{ ou } \underbrace{x < -\sqrt{30}}_{\text{exclu car } x \geq 2}$$

x	2		$\sqrt{30}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{7}$	$\searrow$	$48\sqrt{30}-263$	$\nearrow$	

$$f(2) = \frac{4-26+30}{4+22+30} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

$$f(\sqrt{30}) = \frac{30-13\sqrt{30}+30}{30+11\sqrt{30}+30} = \frac{(60-13\sqrt{30})(60-11\sqrt{30})}{(60+11\sqrt{30})(60-11\sqrt{30})}$$

$$f(\sqrt{30}) = 48\sqrt{30} - 263 \approx -0{,}093$$

3

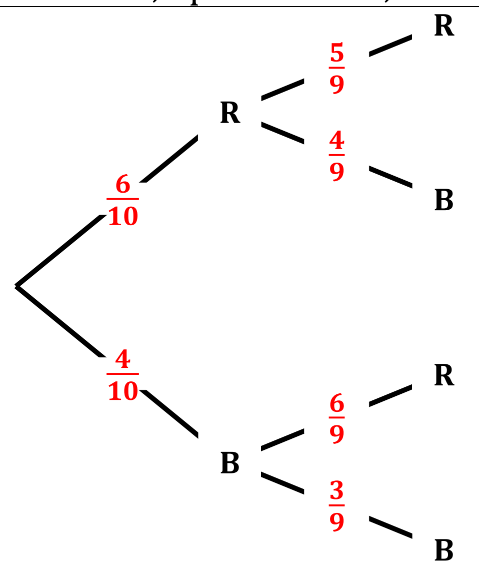
```
from math import *
def f(x):
    return (x**2-13*x+30)/(x**2+11*x+30)
x=sqrt(30)
pas=0.1
while f(x)<0.5:
    x=x+pas
print(x,f(x))
```

```
36.17722557505191 0.5000674550821079
```

Grâce à l'algorithme, on peut conjecturer que la fonction f dépassera la valeur 0,5 pour $x \approx 36{,}18$

Exercice 2. Partie B

1 ***a***



RR	$\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$	**+1 €**
RB	$\frac{24}{90} = \frac{4}{15}$	-1 €
BR	$\frac{24}{90} = \frac{4}{15}$	-1 €
BB	$\frac{12}{90} = \frac{2}{15}$	$+1$ €

On peut alors donner la loi de probabilité de X :

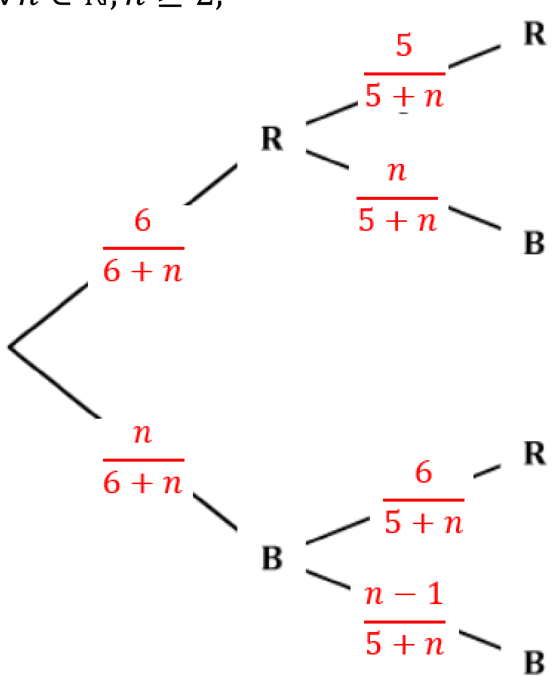
$\boldsymbol{X = k}$	$\boldsymbol{+1}$ **€**	$\boldsymbol{-1}$ **€**
$\boldsymbol{P(X = k)}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{8}{15}$

b

$$E(X) = 1 \times \frac{7}{15} - 1 \times \frac{8}{15} = \frac{-1}{15}$$

Ce jeu n'est pas équitable. Si on joue très longtemps, on peut espérer perdre $\frac{1}{15}$ d'euro en moyenne par partie.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$



2 ***a***

$$P(X = 1\text{ €}) = \frac{6}{6+n} \times \frac{5}{5+n} + \frac{n}{6+n} \times \frac{n-1}{5+n}$$

$$P(X = 1\text{ €}) = \frac{30 + n^2 - n}{(6+n)(5+n)}$$

$$P(X = 1\text{ €}) = \frac{n^2 - n + 30}{n^2 + 11n + 30}$$

$$P(X = -1\text{ €}) = 1 - \frac{n^2 - n + 30}{n^2 + 11n + 30} = \frac{12n}{n^2 + 11n + 30}$$

$$E(X) = 1 \times \frac{n^2 - n + 30}{n^2 + 11n + 30} - 1 \times \frac{12n}{n^2 + 11n + 30}$$

$$E(X) = \frac{n^2 - n + 30 - 12n}{n^2 + 11n + 30}$$

$$E(X) = \frac{n^2 - 13n + 30}{n^2 + 11n + 30}$$

$E(X) = f(n)$ où f est la fonction de la partie A.

		b	$f(n) = 0$ pour $n = 3$ ou $n = 10$ d'après la partie A. Le jeu sera équitable pour 3 ou 10 boules bleues.
		c	La fonction f admet un minimum pour $x = \sqrt{30} \approx 5{,}48$ $f(5) = \dfrac{5^2 - 13 \times 5 + 30}{5^2 + 11 \times 5 + 30} = \dfrac{-10}{110} = \dfrac{-1}{11}$ $f(6) = \dfrac{6^2 - 13 \times 6 + 30}{6^2 + 11 \times 6 + 30} = \dfrac{-12}{132} = \dfrac{-1}{11}$ La perte sera maximale en moyenne pour 5 ou 6 boules bleues.