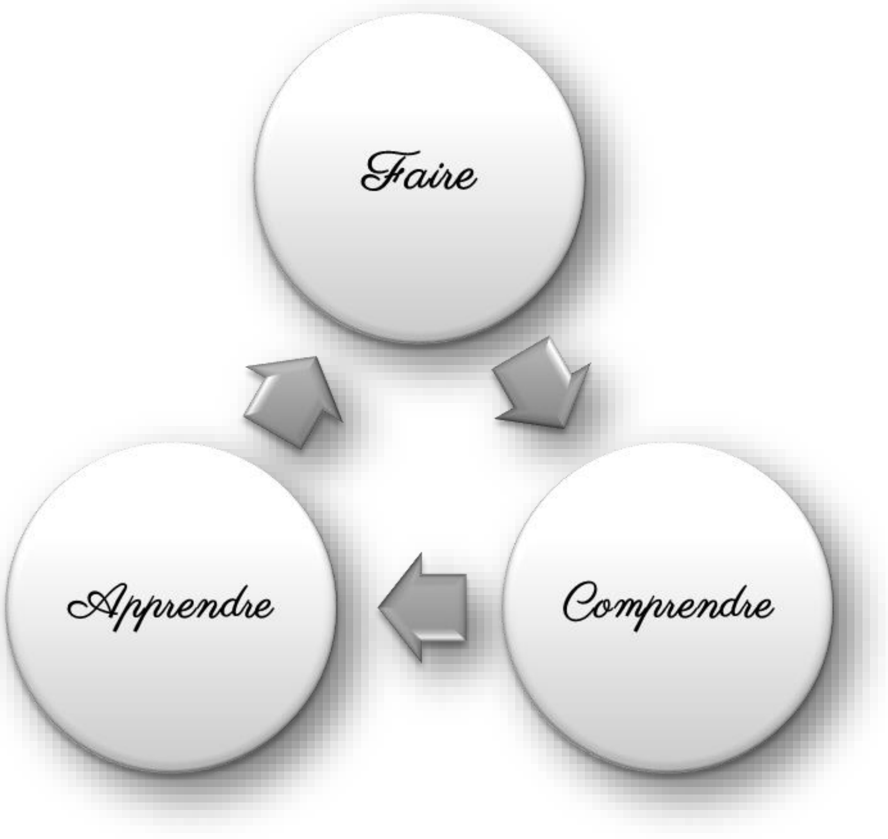
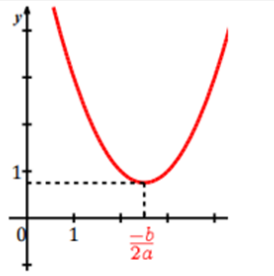
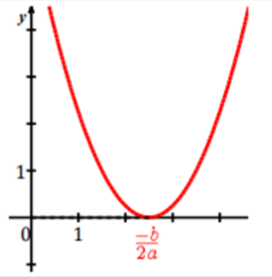
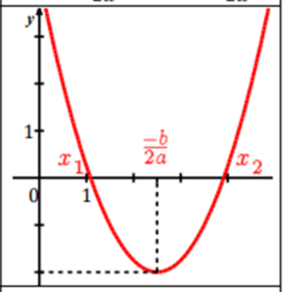
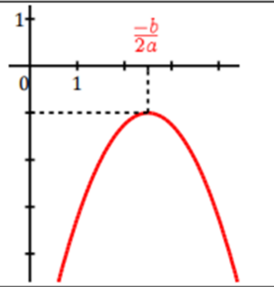
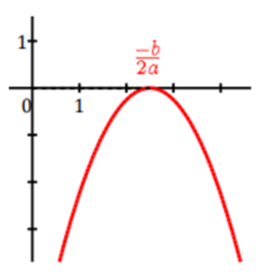
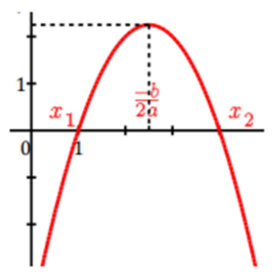
Cahier de vacances
Première ➡ Terminale
Formulaire de Spécialité Maths Première

Table des matières



Cahier de vacances
Première ➡ Terminale
Formulaire de Spécialité Mathématiques Première

1. Le Second Degré

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Le polynôme $ax^2 + bx + c$	n'admet pas de racine	admet une racine double $x' = \frac{-b}{2a}$	admet deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $a > 0$ La parabole est tournée vers le haut			
Si $a < 0$ La parabole est tournée vers le bas			

2. Les suites numériques

Pour déterminer le sens de variations d'une suite :

Suite de signe quelconque	Suite strictement positive
Comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0	Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

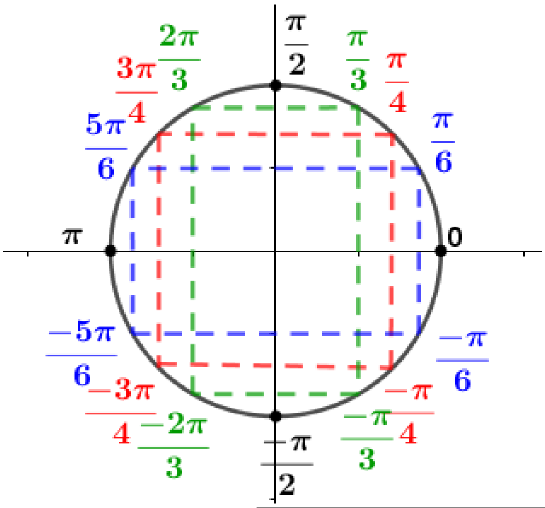
Suites arithmétiques

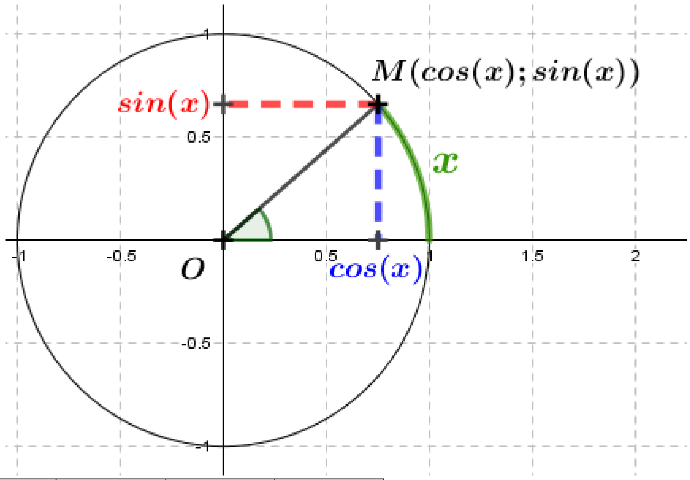
- **On ajoute ou soustrait toujours le même nombre**
- $u_{n+1} = u_n + r$
- $u_n = u_0 + n \times r$
- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ **somme des premiers entiers**

Suites géométriques

- **On multiplie ou divise toujours par le même nombre**
- $u_{n+1} = u_n \times q$
- $u_n = u_0 \times q^n$
- $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ **somme des premières puissances de q**

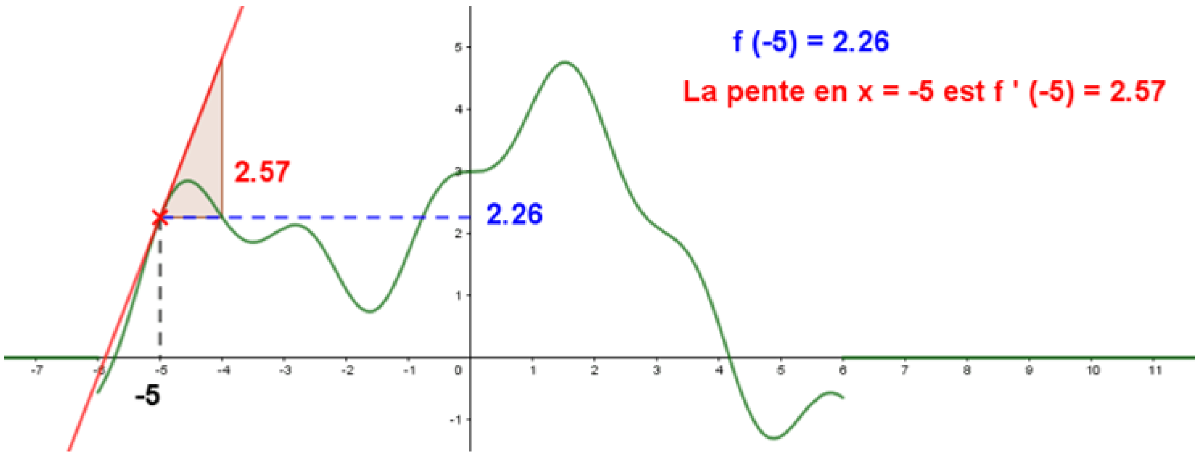
3. La trigonométrie





x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

4. La dérivation



$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3\,x^2$$

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Point méthode

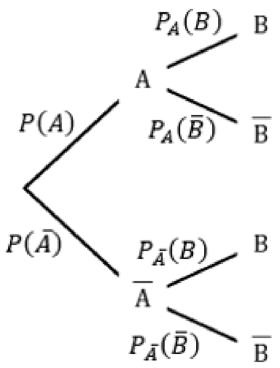
Etudier les variations d'une fonction

- $f(x)$: Pour étudier les variations d'une fonction
- $f'(x)$: Je calcule la dérivée de la fonction
- $f'(x) > 0$: J'étudie le signe de la dérivée
- Tableau : Je conclus en dressant le tableau de variations

5. Les probabilités

Point méthode

Calculer une probabilité conditionnelle



1. Représenter l'arbre de probabilité.
2. Relever les probabilités données dans l'énoncé.
3. Sur un chemin, les probabilités se multiplient.
4. Si nécessaire, les probabilités de chaque chemin s'ajoutent.

Je veux savoir si les événements A et B sont indépendants

Je calcule $P(A \cap B)$ puis $P(A)$ et $P(B)$

- Si $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ alors A et B ne sont pas indépendants
- Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors A et B sont indépendants

L'énoncé me dit que les événements A et B sont indépendants

Je peux calculer $P(A \cap B)$ en utilisant la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

6. La fonction exponentielle

BILAN DES PROPRIETES

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e$$

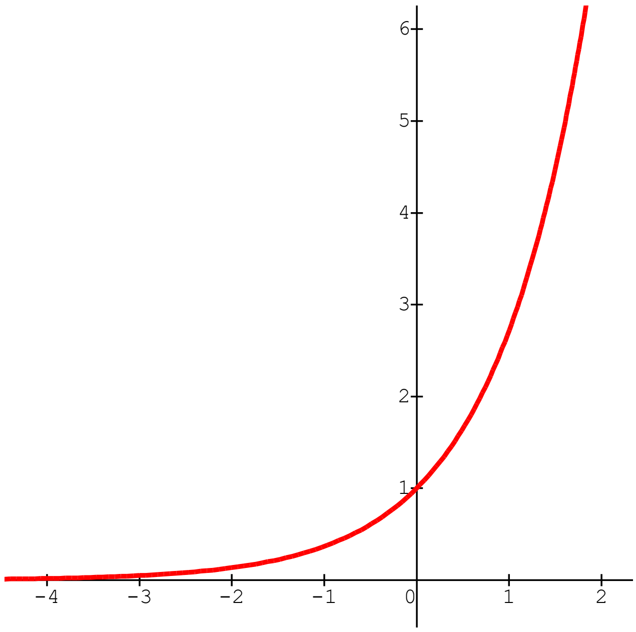
$$\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (e^a)^n = e^{na}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$$



7. Le produit scalaire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$$

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes :

$a)\ 5x^2 - 9x - 2 = 0$

$b)\ 3x^2 - 4(2x+1) = 2x^2 - 4x - 1$

$c)\ 3x = \frac{5}{x} - 14$

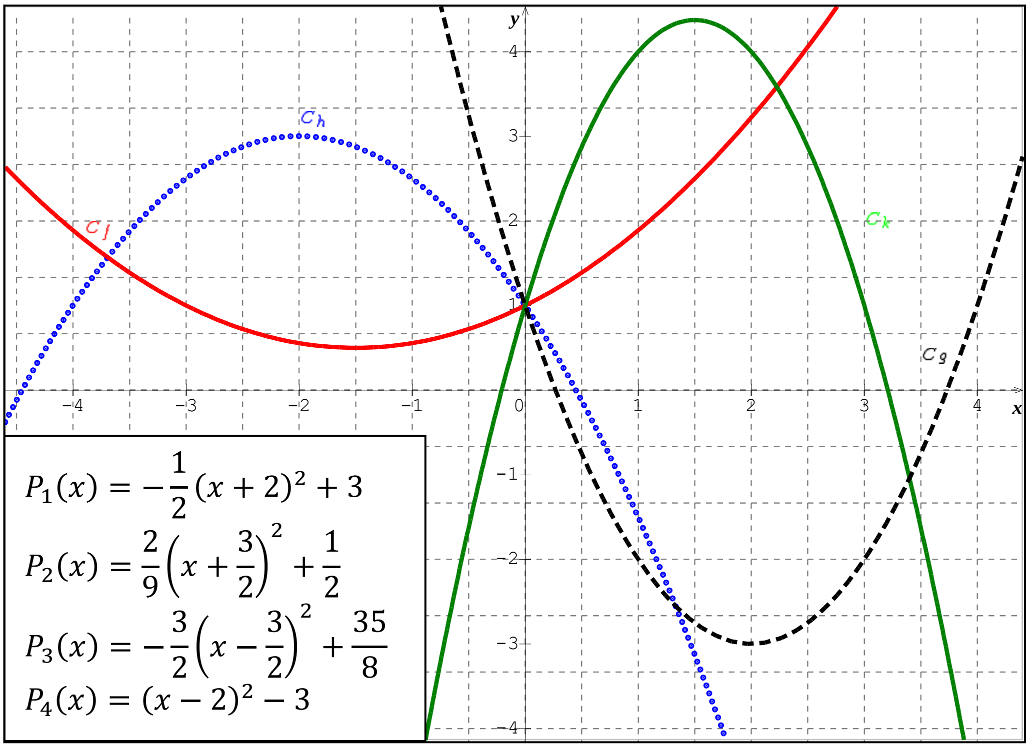
$d)\ x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Exercice 2.

Un agriculteur cultive des asperges qu'il vend directement à la ferme 8 euros le kilogramme. Pour x kilogrammes d'asperges vendues où $x \in [0; 1000]$, ses frais s'élèvent à $f(x) = 0{,}08x^2 - 48x + 4800$.
Combien doit-il vendre de kilogrammes d'asperges pour être bénéficiaire ?

Exercice 3.

Associer, en justifiant, chaque courbe à son expression algébrique.



$P_1(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$

$P_2(x) = \frac{2}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$P_3(x) = -\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{35}{8}$

$P_4(x) = (x-2)^2 - 3$

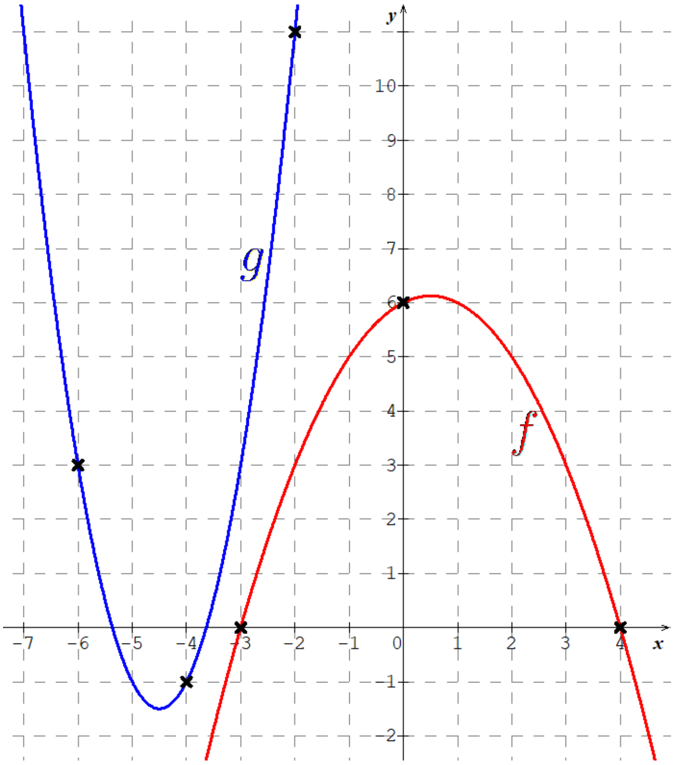
Exercice 4.

►1. On souhaite construire un parc rectangulaire de périmètre 270 m et d'aire 3224 m^2. ***Quelles doivent être ses dimensions ?***

►2. Existe-t-il deux nombres qui ont pour somme -3 et pour produit -10 ?

Exercice 5.

Déterminer l'expression algébrique des paraboles tracées ci-dessous :



Exercice 6.

En France, le Centre national d'études spatiales (CNES) est responsable de l'organisation de campagnes de vols paraboliques depuis 1989. Le vol parabolique est un moyen relativement peu coûteux de créer une situation de micropesanteur qui permet de faire des expériences scientifiques. Un vol parabolique contient quinze paraboles et dure trois heures environ.

Lors d'un vol parabolique, on modélise une parabole en fonction de t le temps en secondes par $h(t)$ la hauteur en mètres de l'avion où $h(t) = -3t^2 + 165t + 6318$.

▶ 1. L'altitude plancher d'une parabole étant 6318 mètres, quelle est la durée d'une parabole ?

▶ 2. La micropesanteur a lieu lorsque l'avion est au-dessus de 8118 mètres d'altitude. Calculer, en détaillant, la durée de la phase de micropesanteur pour cette parabole.

▶ 3. A quelle hauteur maximale s'élèvera l'avion et à quel instant atteindra-t-il ce maximum ?

▶ 4. A la fin de la parabole, de combien de temps dispose le pilote pour rétablir l'avion afin d'éviter que celui-ci s'écrase au sol ?

Exercice 7.

▶ 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1$

a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.

b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer votre réponse.

▶ 2. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 5n^2 - n + 1$

a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.

b) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ? Démontrer votre réponse.

Exercice 8.

▶ 1. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2n+1}$

a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.

b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer votre réponse.

▶ 2. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2^n}{n+1}$

a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.

b) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ? Démontrer votre réponse.

Exercice 9.

Une ville a organisé à partir du 1er janvier 2022, la récupération du verre usagé. Elle a récolté 200 tonnes de verre. On s'attend à ce que chaque année la quantité de verre récupéré par la ville augmente de 5%. **Déterminez au bout de combien d'années, la quantité de verre récupéré aura été multipliée par 5 ainsi que la somme de toutes les tonnes de verre récupéré entre 2012 et 2045.**

Exercice 10.

▶1. En 2005, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 270 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros. Déterminer, en justifiant, le chiffre d'affaires en 2023 de l'entreprise A.

▶2. En 2005, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %. Déterminer, en justifiant, le chiffre d'affaires en 2023 de l'entreprise B.

▶3. En 2023, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires double de celui de l'entreprise A. **A-t-il raison ? Justifier.**

Exercice 11.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

▶3. Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 12.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{6u_n-1}{9u_n}$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{3u_n-1}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle arithmétique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

▶3. Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 13.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le point A a pour coordonnées $(1;0)$. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. On note T la tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point A.

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, le point M est placé de façon à ce que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right) = x$.

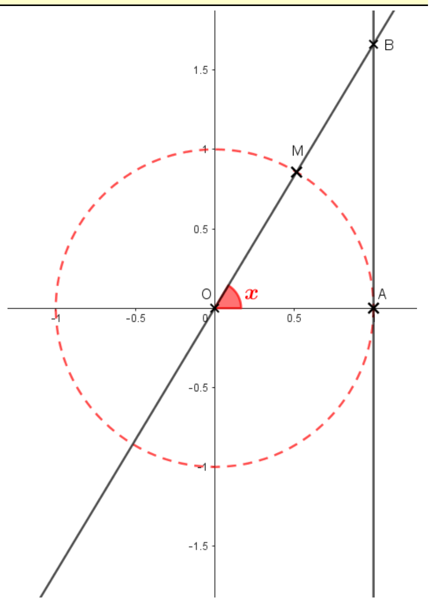
La droite (OM) coupe la tangente T au point B.

▶1. En utilisant le projeté orthogonal du point M sur la droite (OA), exprimer, en fonction de x, la longueur AB.

▶2. Existe-t-il une valeur de x telle que $AB = 1$?

▶3 a) Pour tout x, que vaut $\cos^2(x) + \sin^2(x)$?

b) Existe-t-il une valeur de x telle que $AB = 2$? On donnera une valeur arrondie au degré près.



Exercice 14.

Résoudre les équations ci-dessous :

$a)\ \cos(x) = \frac{1}{2}$ $\qquad b)\ \sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$c)\ 1 - \cos^2(x) = \frac{1}{2}$ $\qquad d)\ 1 + \frac{\sin(x) - 1}{2} = \frac{3}{4}$

Exercice 15.

Ces dernières années, la rougeole a fait son retour suite à la diminution du nombre de personnes vaccinées. Dans une région française, une étude statistique a montré que :
• 79 % de cette population est vaccinée contre la rougeole ;
• parmi les personnes vaccinées contre la rougeole, 0,1 % d'entre elles a contracté cette maladie ;
• parmi les personnes non vaccinées contre la rougeole, 10 % d'entre elles ont contracté cette maladie.
On choisit au hasard une personne concernée par cette enquête. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On considère les évènements suivants :
• R : « la personne choisie est atteinte de la rougeole » ;
• V : « la personne choisie est vaccinée contre la rougeole ».
▶1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
▶2. Calculer la probabilité que la personne prise au hasard soit vaccinée et atteinte de la rougeole.
▶3. Calculer la probabilité de l'évènement R.
▶4. La personne choisie est atteinte de la rougeole. Calculer la probabilité qu'elle ne soit pas vaccinée.
▶5. La région française dans laquelle l'étude a été menée compte 2 millions d'habitants. Un journal régional affirme dans l'un de ses articles : « Recrudescence des cas de rougeole : plus de 40 000 malades dans notre région ». Cette affirmation est-elle correcte ?

🠉

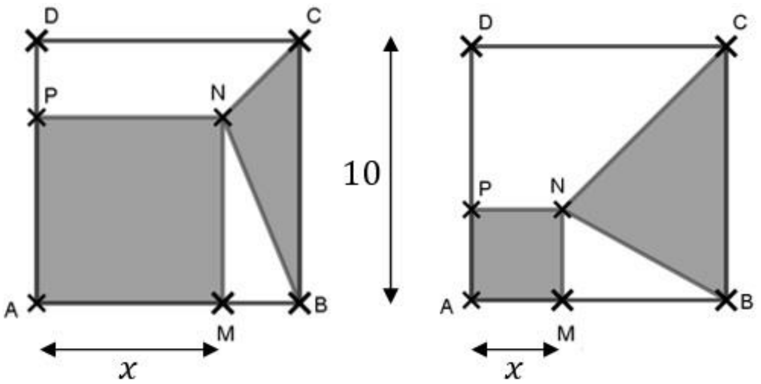
Exercice 16.

Selon une étude effectuée dans une maternité d'Île-de-France en 2022, on sait que :
• 8 % des femmes ont accouché prématurément (avant 37 semaines d'aménorrhée),
• parmi les femmes ayant accouché prématurément, 15% ont fumé régulièrement durant les trois premiers mois de sa grossesse.
• 6 % des femmes ayant accouché ont fumé régulièrement (au moins 10 cigarettes par jour) durant les trois premiers mois de leur grossesse ;
Le directeur de la maternité choisit au hasard le dossier d'une femme ayant accouché en 2022 dans son établissement. Chaque dossier a la même probabilité d'être choisi. On note les évènements :
• A : « le dossier est celui d'une femme dont l'accouchement a eu lieu prématurément » ;
• F : « le dossier est celui d'une femme ayant fumé régulièrement durant les trois premiers mois de sa grossesse ».
▶1a) Calculer la probabilité que le dossier choisi au hasard soit celui d'une femme ayant fumé régulièrement durant les trois premiers mois de sa grossesse et ayant accouché prématurément.
b) En déduire $P(\bar{A} \cap F)$ puis $P_{\bar{A}}(F)$.
▶2. a. Sachant que le dossier choisi est celui d'une femme ayant fumé régulièrement durant les trois premiers mois de sa grossesse, calculer la probabilité que cette femme ait accouché prématurément.
b. Calculer $P_{\bar{F}}(A)$. Que peut-on en déduire concernant le lien entre tabagisme et accouchement prématuré ?

🠉

Exercice 17.

$ABCD$ est un carré de côté 10 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[AB]$, on note x la longueur AM. On construit le carré AMNP et le triangle NBC.
Pour tout $x \in [0; 10]$, on note $f(x)$ l'aire grisée.



▶1. Démontrer que, pour tout $x \in [0; 5]$,

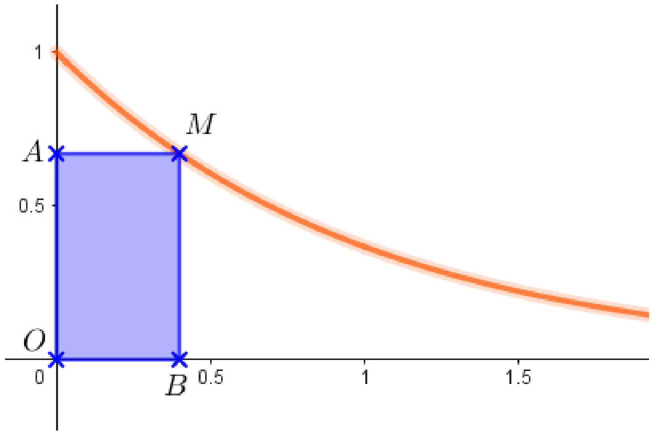
$$f(x) = x^2 - 5x + 50.$$

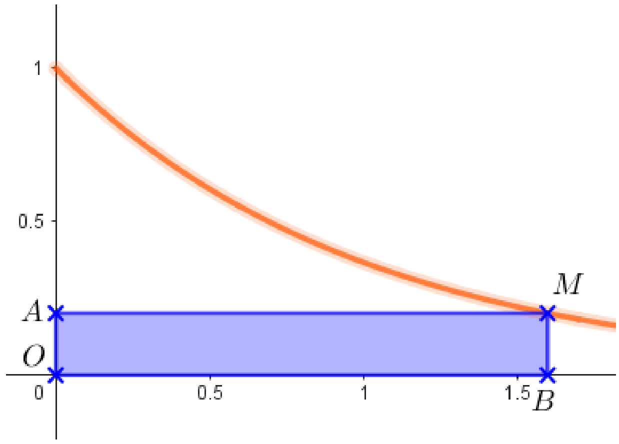
▶2. L'aire grisée admet-elle un extremum ? Justifier votre réponse.

🠉

Exercice 18.

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = e^{-x}$ a été tracée sur $[0; +\infty[$.



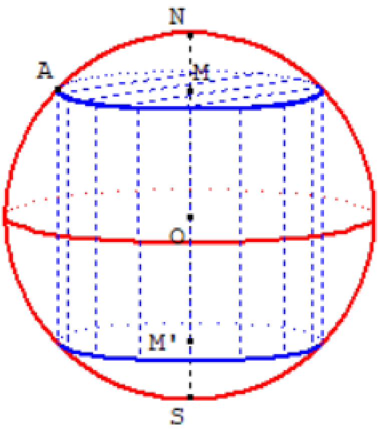


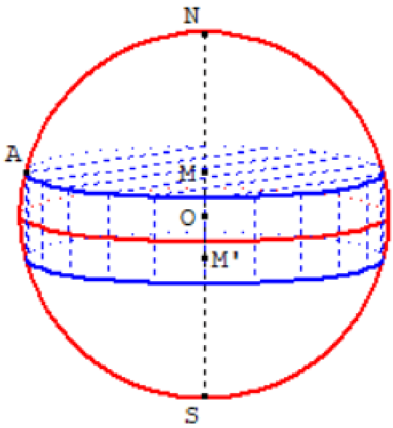
Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, le point M, d'abscisse x, appartient à la courbe représentative de la $f(x) = e^{-x}$.
Les projections orthogonales du point M sur les axes (Oy) et (Ox) donnent respectivement les points A et B. Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, on appelle $g(x)$ l'aire du rectangle $OAMB$.

▶1 a) L'aire du rectangle $OAMB$ peut-elle être égale à 0 ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x ?
b) Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, exprimer $g(x)$.
b) En déduire, en justifiant, pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $OAMB$ est maximale.

Exercice 19.

On considère une sphère de rayon 6 cm, de centre O et de diamètre $[NS]$.
Le point M est un point du segment $[ON]$. Le point M' est le symétrique du point M par la symétrie de centre O. Le point A est un point de la sphère placé de façon à ce que les droites (AM) et (MO) soient perpendiculaires.





On pose que $OM = x$ et on étudie le volume $V(x)$ du cylindre de hauteur $[MM']$ et de rayon $[AM]$.

▶1. Dans quel intervalle varie x ?
▶2 a) Exprimer la longueur AM en fonction de x.
b) Exprimer le volume $V(x)$ en fonction de x.
▶3 a) Démontrer que, pour tout $x \in [0; 4]$, $V'(x) = 2\pi(36 - 3x^2)$.
b) En déduire, en justifiant, pour quelle valeur de x le volume du cylindre est maximal.

Exercice 20.

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2x} - 2$ et $g(x) = 2e^{-x} - 5$

▶1. Les courbes représentatives des fonctions f et g ont-elles un ou des point(s) d'intersection ?

▶2. Existe-t-il une abscisse x telle que les tangentes aux courbes respectives de f et g soient parallèles au point d'abscisse x ?

Exercice 21.

▶ 1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x) - 1$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

c) En déduire le signe de la fonction g.

▶ 2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x}$.

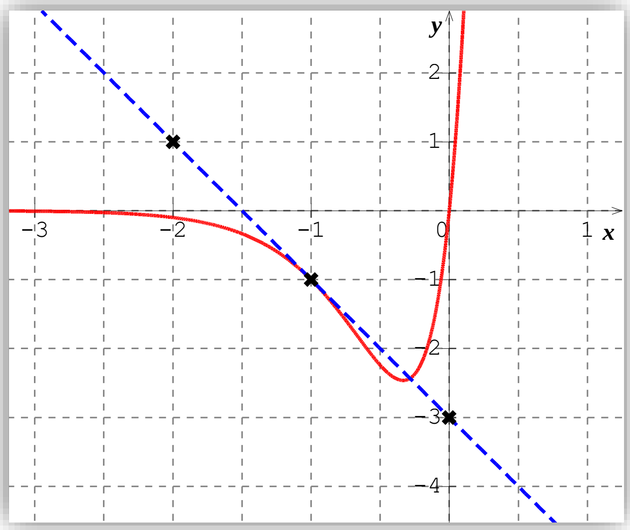
a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 22.

Partie A.

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.



▶ 1 a) Lire graphiquement $f(-1)$.

b) Lire graphiquement $f'(-1)$.

▶ 2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{ax+b}.$$

Déterminer, en justifiant, les valeurs de a et b.

Partie B.

On étudie la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = xe^{3x+3}$$

▶ 1 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

▶ 2 a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g en 0.

b) Etudier la position relative de la courbe de g et de sa tangente en 0.

Exercice 23.

Partie A. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^x$.

▶ 1. Etudier les variations de la fonction g.

▶ 2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de la fonction g en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Partie B. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

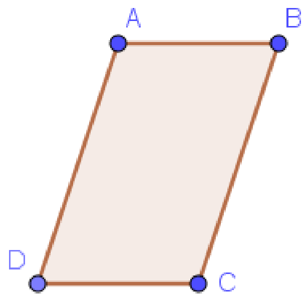
▶ 1. a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

▶ 2 a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.

b) Etudier la position relative de la courbe de f et de sa tangente en 0.

Exercice 24.



$ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 8$ cm et $AD = 4$ cm.

▶ 1. En utilisant la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

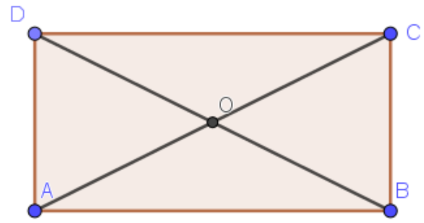
▶ 2 a) Calculer AC.

b) En déduire l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)$ au degré près.

c) Calculer alors l'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$.

Exercice 25.

Le but de cet exercice est de démontré que « Dans un parallélogramme, la somme des carrées des longueurs des côtés est égal à la somme des carrés des diagonales. »



Soit $ABCD$ un parallélogramme quelconque.

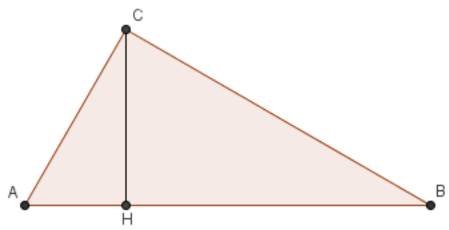
▶ 1. On note $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$, calculer plus simplement ce produit scalaire.

▶ 2. En utilisant la relation de Chasles et le calcul vectoriel, démontrer que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

Exercice 26.

ABC est un triangle tel que $AC = 6$ cm et $AB = 12$ cm.
H est le pied de la hauteur issue de C et la longueur AH mesure 3 cm.



▶ 1. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

▶ 2. En déduire une mesure de l'angle $C\hat{A}B$ en valeur exacte.

Exercice 27.

Soit les points $A(4;0)$ $B(1;-1)$ $C(2;1)$ dans un repère orthonormé

▶ 1. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

▶ 2 a) Démontrer que $\cos\left(C\hat{B}A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) En déduire l'angle $C\hat{B}A$.

▶ 3. On appelle H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
Calculer la longueur BH.