Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (783 - 850)

محمد بن موسى الخوارزمي

Mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman perse dont les écrits, rédigés en langue arabe, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe.

I. Résolution de l'équation du second degré

Définition.

$P(x) =$

Lorsque a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$, $P(x)$ s'appelle un **polynôme du second degré**.

Cette **écriture** qui est la forme **réduite** du polynôme, est **unique**.

La forme canonique :

Exemple

$$P(x) = 2x^2 + 4x - 4$$

Cas général

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Définition

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du polynôme.

C'est ce nombre qui va permettre de discriminer les équations

$ax^2 + bx + c = 0$ *selon le nombre de solutions.*

Théorème : Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution réelle double $x' = \frac{-b}{2a}$
- si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Exemples

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
2. Déterminer deux nombres qui ont pour somme 20 et pour produit 96. (Historique)
3. Quel est le domaine de définition de la fonction
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ de discriminant Δ.

Définition

Les solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation

$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées les **racines** du poly-

nôme.

Théorème de factorisation

- si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines x_1 et x_2 et on peut factoriser

  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- si $\Delta = 0$ alors il y a une seule racine x' et on peut factoriser

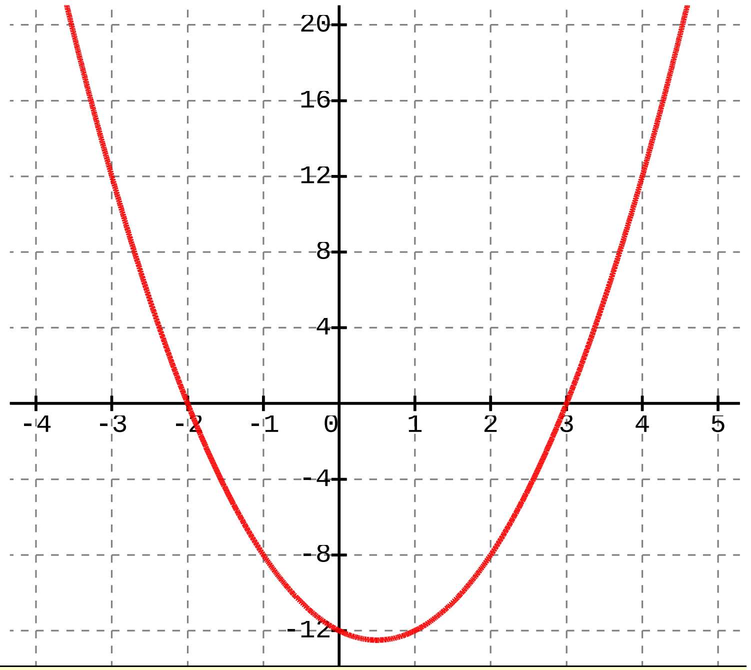
  $P(x) = a(x - x')^2$

- si $\Delta < 0$ alors le polynôme ne peut pas être factorisé dans $\mathbb{R}$.

Lorsqu'un polynôme possède une racine, on peut factoriser le polynôme par $(x - \mathbf{racine})$

Exemples

1. Factoriser $P(x) = 9x^2 - 6x + 1$
2. Déterminer l'expression algébrique de la parabole ci-contre.



II. Étude du signe du trinôme.

Propriété

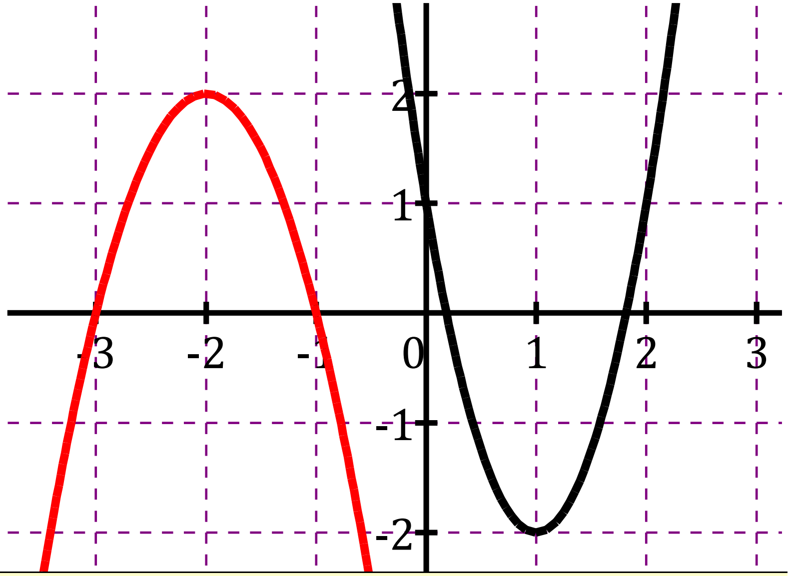
Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous **forme canonique** $P(x) = \boldsymbol{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} = a(x-\alpha)^2+\beta}$

où $a \neq 0$, α et β sont des nombres réels.

Conséquence

Si a >0, la parabole est tournée vers le haut,

Si a <0, la parabole est tournée vers le bas.



En résumé : $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

Si $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac} < 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $P(x)$	Signe de a

Si $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
Signe de $P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

Si $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac} > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe de $P(x)$	Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

Exemple

Résoudre l'inéquation $\dfrac{3}{4x-1} \leq x$

Solution : ⚠ Dans une inéquation, il est interdit de multiplier ou diviser par une expression qui contient x car le signe de cette expression est indéterminé

$$\frac{3}{4x-1} \leq x \Leftrightarrow \frac{3}{4x-1} - x \leq 0$$

Mise au même dénominateur

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4x-1} - \frac{x(4x-1)}{4x-1} \leq 0$$

$$\frac{3-4x^2+x}{4x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+x+3}{4x-1} \leq 0$$

Etudions le signe du numérateur $-4x^2 + x + 3$:

$$\Delta = 1 - 4 \times (-12) = 49 > 0$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-7}{-8} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+7}{-8} = -\frac{6}{8} = \frac{-3}{4}$$

$a = -4 < 0$ donc la parabole est tournée vers le bas,

On en déduit le signe du polynôme :

x	$-\infty$		$\frac{-3}{4}$		1		$+\infty$
$-4x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Etudions le signe du dénominateur $4x-1$:

$$4x-1>0 \Leftrightarrow 4x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$$

On en déduit le signe du quotient :

x	$-\infty$		$\frac{-3}{4}$		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$-4x^2+x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-4x^2+x+3}{4x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Les solutions sont donc $\left[-\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right[\cup [1;+\infty[$

III. Variations de la fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$

Théorème :

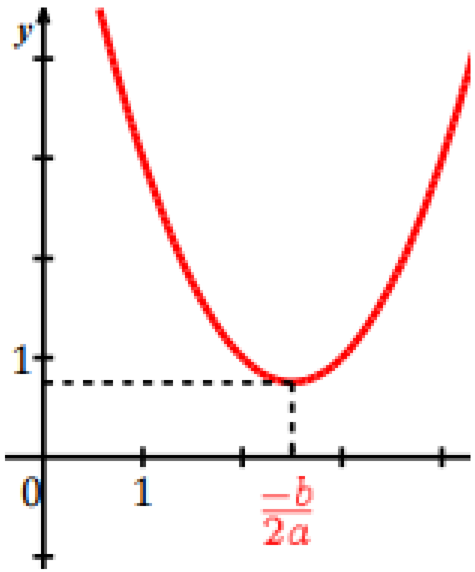
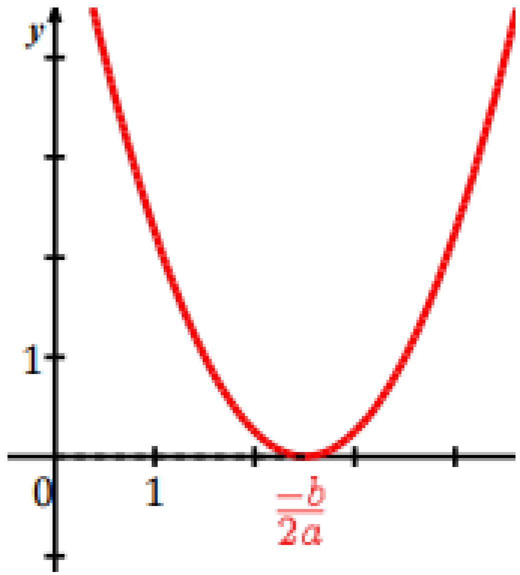
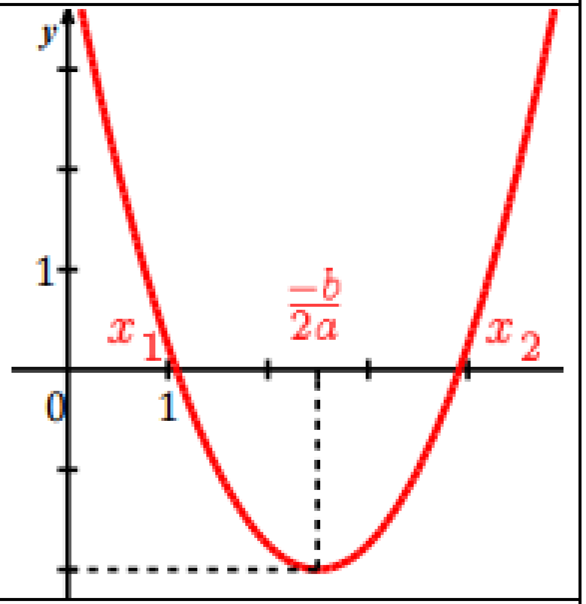
$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } a \neq 0$$

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Si $a < 0$,

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Le polynôme $ax^2 + bx + c$	n'admet pas de racine	admet une racine double $x' = \frac{-b}{2a}$	admet deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $a > 0$ La parabole est tournée vers le haut			
Si $a < 0$ La parabole est tournée vers le bas