Chap 2. Comment peut-on décrire des phénomènes itératifs ?

Leonardo Fibonacci (1175 - 1250)

Mathématicien italien, s'il est connu pour la suite qui porte son nom, il joue surtout un rôle d'une importance considérable en faisant le lien entre le savoir mathématique des Arabes, notamment des chiffres indo-arabes, et l'Occident. Ses travaux ont porté sur le calcul du profit des transactions, les conversions entre monnaies de différents pays utilisant des bases différentes (base 10, 12, 20).

I. Suite de nombres

Définition

Une **suite** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) = u_n \end{array}$$

u_0 est le **premier terme** ou **terme initial** de la suite,

u_n est le **terme de rang *n*** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple n°1 :

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt{n^2 + 1}$$

$$v_0 = 0 \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + 1}$$

Calculer u_1, u_3 et u_{10}, puis v_1, v_3 et v_{10}.

	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3	1	1,4142136
4	2	2,236068
5	3	3,1622777
6	4	4,1231056
7	5	5,0990195
8	6	6,0827625
9	7	7,0710678
10	8	8,0622577
11	9	9,0553851
12	10	10,049876

Ecrire les formules des cellules A3 et B3 qui, par copier-coller, permettent d’obtenir le tableau ci-contre.

	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3		

	A	B
1	n	v_n
2	0	0
3	1	1
4	2	1,4142136
5	3	1,7320508
6	4	2
7	5	2,236068
8	6	2,4494897
9	7	2,6457513
10	8	2,8284271
11	9	3
12	10	3,1622777

Ecrire les formules des cellules A3 et B3 qui, par copier-coller, permettent d'obtenir le tableau ci-contre.

	A	B
1	n	v_n
2	0	0
3		

Les suites peuvent être définies soit :

 par une **formule explicite** : $u_n = \underbrace{\sqrt{n^2 + 1}}_{\text{explicite}}$

 par une **formule de récurrence** : $\underbrace{u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}}_{\text{récurrence}}$

Définition. Sens de variations d'une suite.

Une suite est **croissante** lorsque,

pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$

Une suite est **strictement croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$$

Elle est **décroissante** lorsque,

pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$

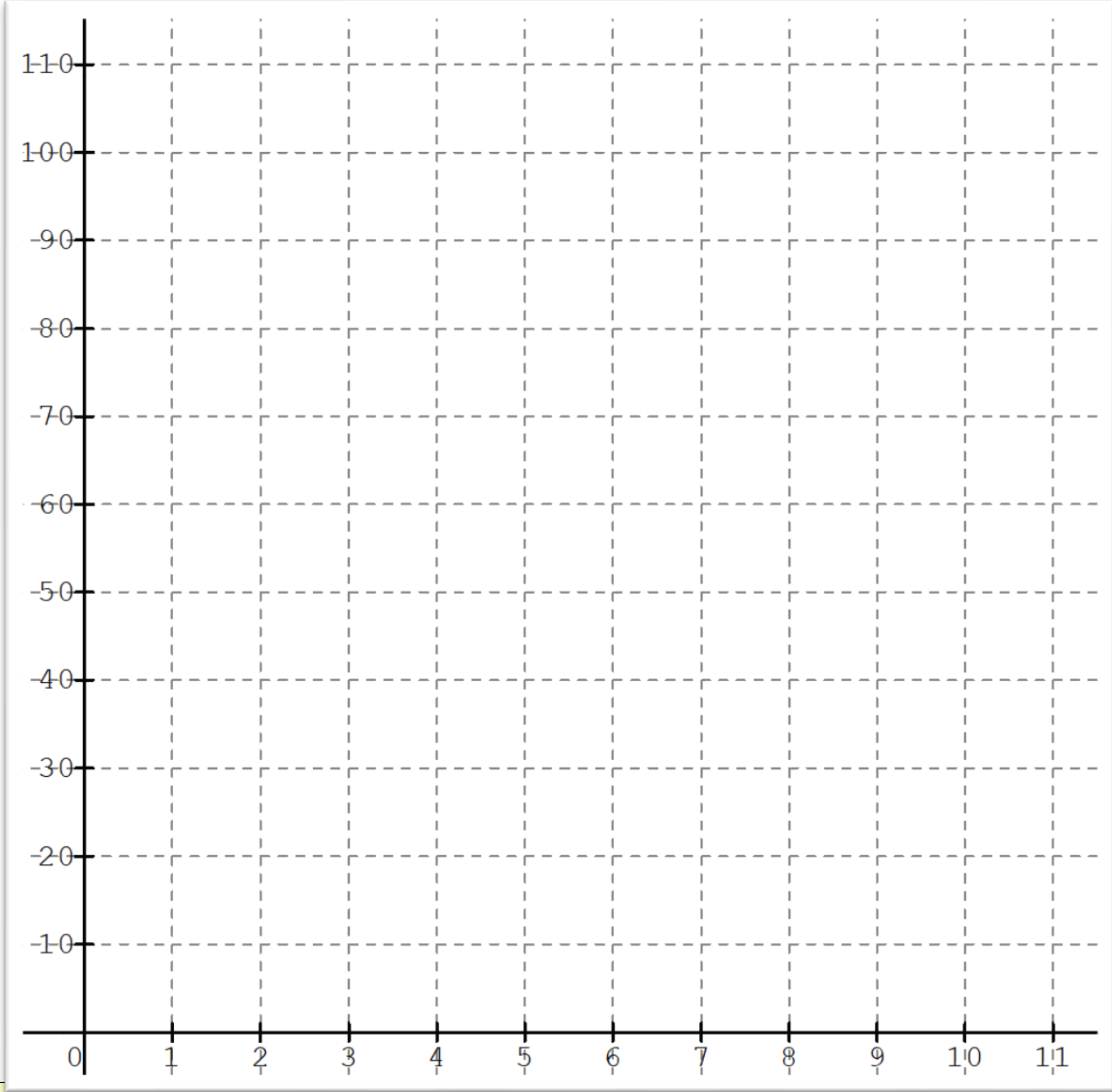
Elle est **strictement décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$$

Exemple n°2 :

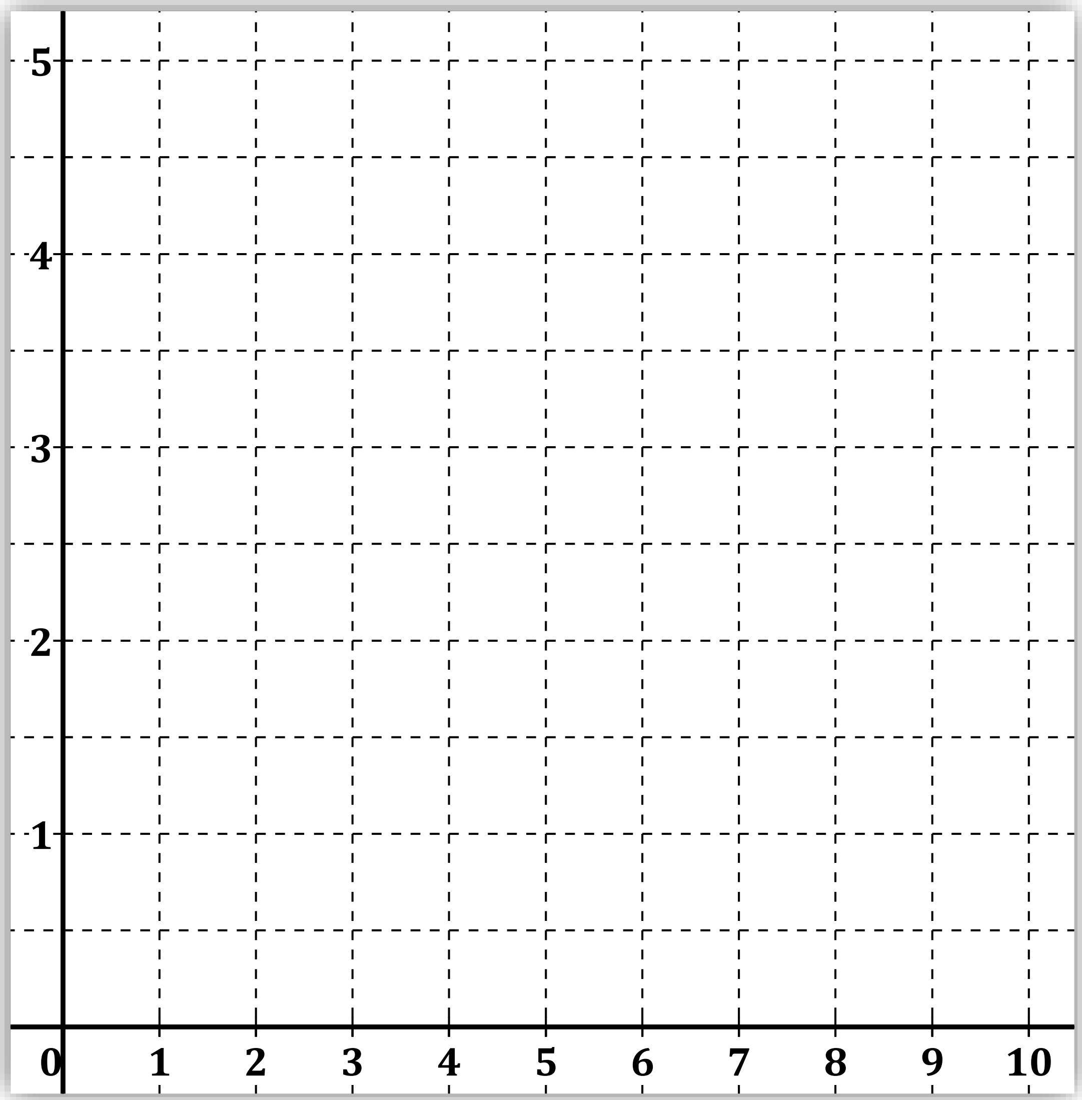
a) Etudier les variations de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 - n$$



b) Etudier les variations de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{4}{5^n}$$



Pour déterminer le sens de variations d'une suite :

Suite de signe quelconque	Suite strictement positive
Comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0	Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

II. Suite arithmétique

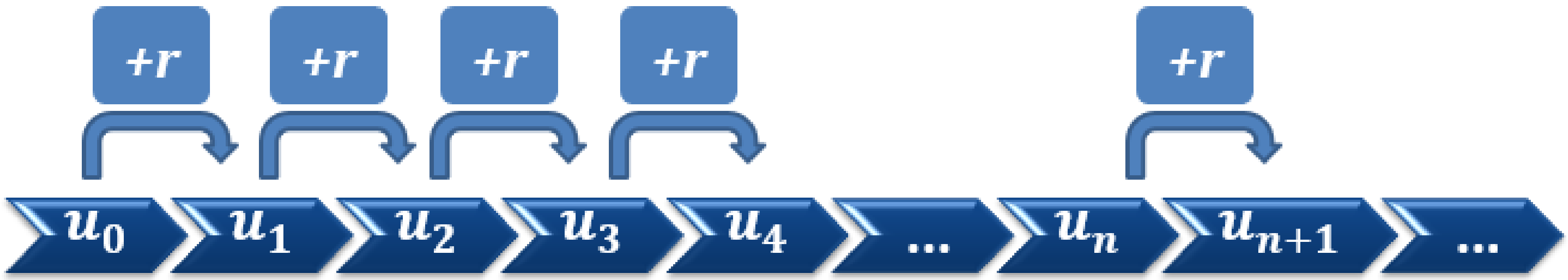
	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3	1	3
4	2	6
5	3	9
6	4	12
7	5	15

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \boldsymbol{r}$$

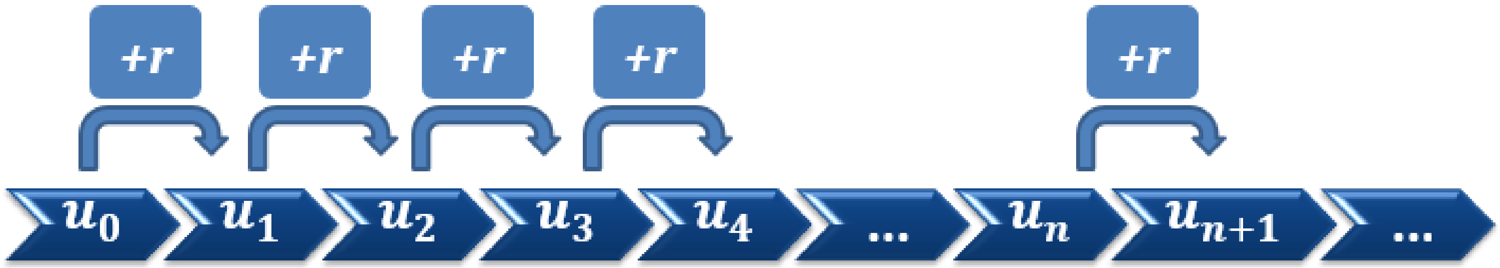
r s'appelle la **raison** de la suite



On parle de **progression arithmétique** lorsque les nombres se suivent avec toujours le même écart.

Théorème :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de 1er terme u_0



$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

C'est la **formule explicite** qui permet de calculer u_n en fonction de n.

Exemple n°3 :

$\mathbb{N}$, $(2p)_{p\in\mathbb{N}}$, les nombres impairs, la table de 4 …

Exemple n°4 :

Hypatie place un capital de 1500 € à intérêts simples au taux annuel de 5%. On parle d'**intérêts simples** lorsque seul le capital initial est pris en compte pour le calcul des intérêts.

Pour tout entier n, u_n est la valeur acquise au bout de n années.

1. Quel sera la valeur acquise au bout d'un an ?
2. Pour tout entier n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
3. En déduire la nature de la suite (u_n).
4. Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.
5. Quelle sera la valeur acquise dans 15 ans ?
6. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

Exemple n°5 :

Dans les années 1780, en ce qui est aujourd'hui l'Allemagne. M. Büttner est instituteur. Ses élèves étant ce jour là quelque peu dissipés, il leur demande d'additionner les nombres de 1 à 100, espérant bien obtenir un peu de calme. Seulement voilà, à peine quelques instants plus tard, alors que tous devraient être en train de plancher pour encore un moment sur le problème, l'un d'eux prétend avoir le résultat : Carl Friedrich Gauss, 10 ans.

Calculer la somme des 100 premiers nombres entiers.

Théorème :

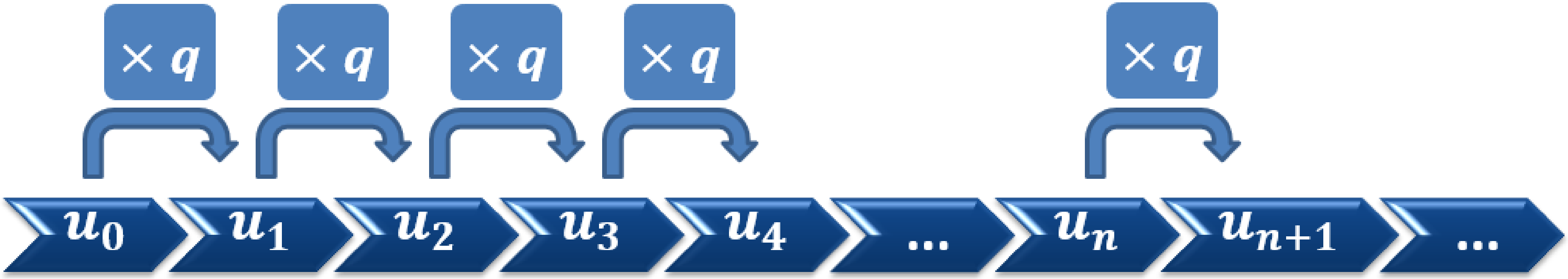
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple n°6 :

Evariste invite ses amis à une fête. Avec le dessert, les invités trinquent tous les uns avec les autres.
Sa voisine Faustina entend 325 «Tchin» de verres.
Combien y-a-t-il de personnes présentes à la fête ?

III. Suite géométrique

	A	B
1	n	u_n
2	0	2
3	1	8
4	2	32
5	3	128
6	4	512
7	5	2048



Définition

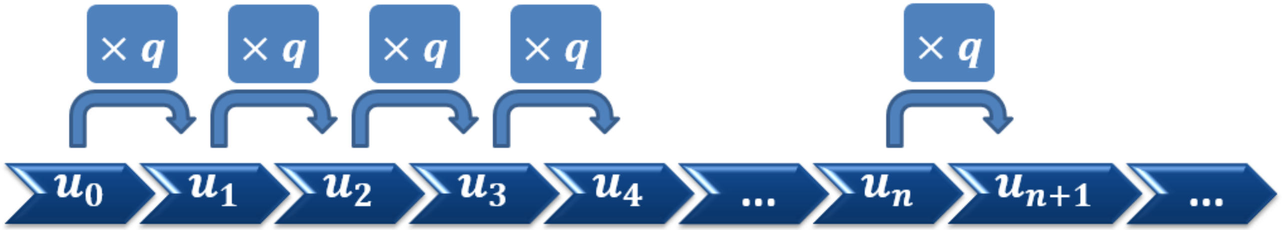
Une suite (u_n) est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre q tel que pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n \boldsymbol{\times q}$ $\qquad$ q s'appelle la **raison** de la suite

On parle de **progression géométrique** lorsque les nombres se suivent en étant toujours multipliés par le même nombre.

Théorème

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0



Pour tout entier n :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$$
$$\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$$

C'est la **formule explicite** qui permet de calculer u_n en fonction de n.

Exemple n°7 :

a) Capacité des clés USB ci-contre :

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 5^n$ et $v_n = \dfrac{7^{n+1}}{5^n}$

c)

Préfixe	Facteur multiplicatif	Préfixe	Facteur multiplicatif
Péta		Milli	
	10^{12}	Micro	
Giga		Nano	
Méga		Pico	
Kilo		Femto	

Exemple n°8 :

Kaïs place un capital de 1500 € à intérêts composés au taux annuel de 5%. On parle d'**intérêts composés** lorsque le capital de l'année précédente est pris en compte pour le calcul des intérêts.

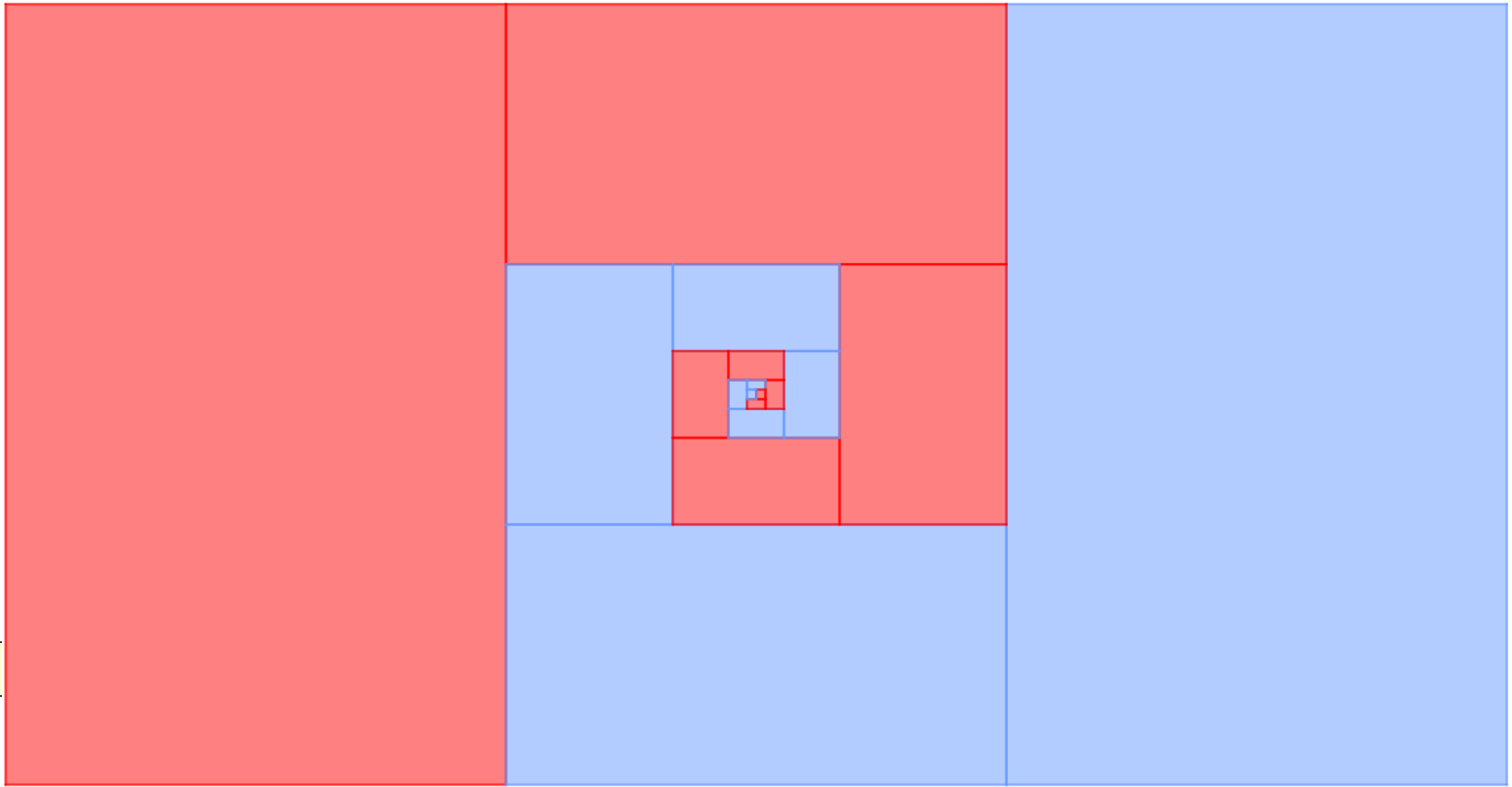
Pour tout entier n, u_n est la valeur acquise au bout de n années.

1. Quel sera la valeur acquise au bout d'un an ?
2. Pour tout entier n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
3. En déduire la nature de la suite (u_n).
4. Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.
5. Quelle sera la valeur acquise dans 20 ans ?
6. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

Théorème :

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1$$

Exemple n°9 :



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right) \text{ où } n \text{ est un entier très grand}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

Si n est très grand, la somme est très proche de $\frac{1}{2}$.

Chap 2. Comment peut-on décrire des phénomènes itératifs ?

Suites arithmétiques

On ajoute ou soustrait toujours le même nombre

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r$

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

somme des premiers entiers

Suites géométriques

On multiplie ou divise toujours par le même nombre

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$

$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

somme des premières puissances de q