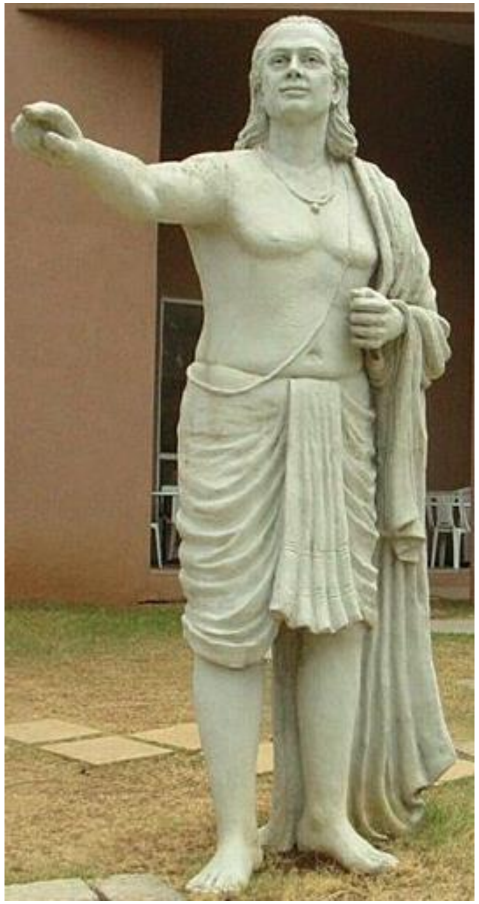
Ârvabhata (476 - 550)



Il fut sans doute le plus grand mathématicien indien et un grand astronome. En 499, il donne une table des sinus et des cosinus et introduit l'inverse du sinus.

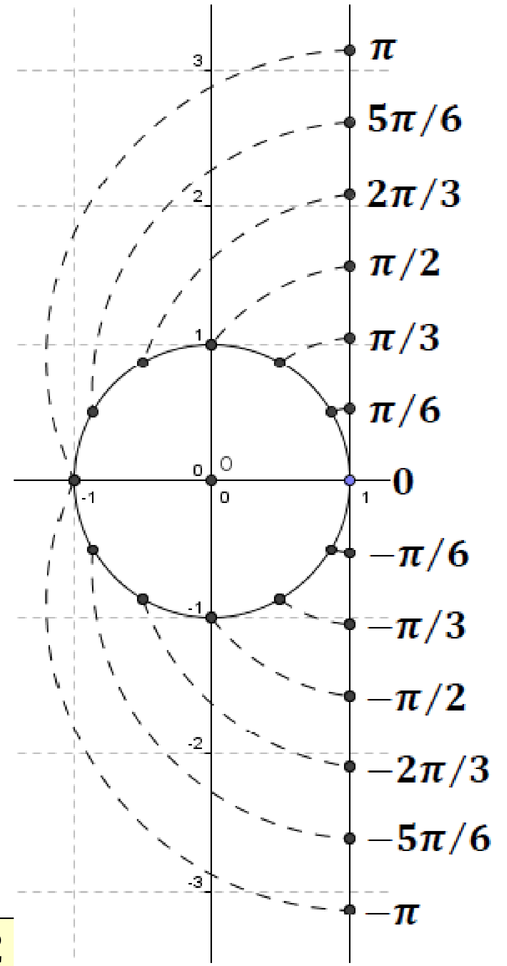
Chap 3. Comment définir le sinus et le cosinus des angles en radian ?

Première Générale

I. Le cercle trigonométrique

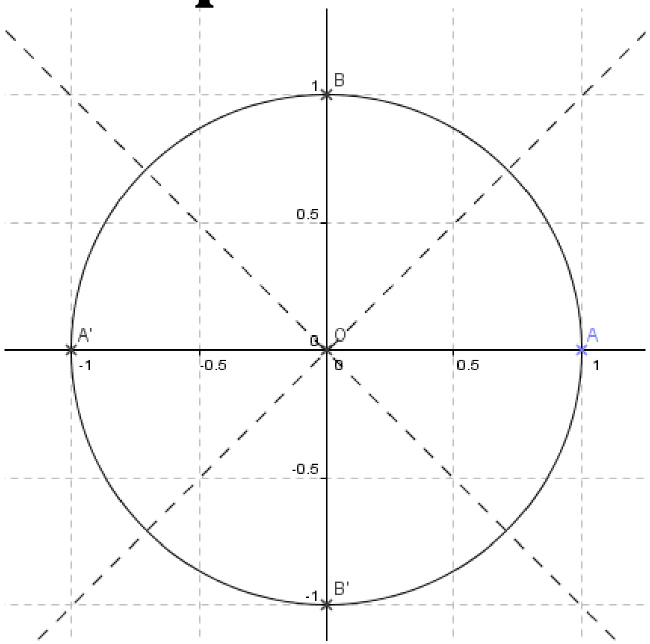
Définition

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).



Chaque point M du cercle trigonométrique est repéré par un unique réel t de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Exemple n°1 : Sur le cercle trigonométrique, placer les points correspondants aux longueurs d'arc :



$$\frac{3\pi}{4} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \text{puis} \quad \frac{11\pi}{4} \quad \frac{-10\pi}{3}$$

Les réels associés au point M sont alors de la forme $t + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$2k\pi$ représente k tours complets :

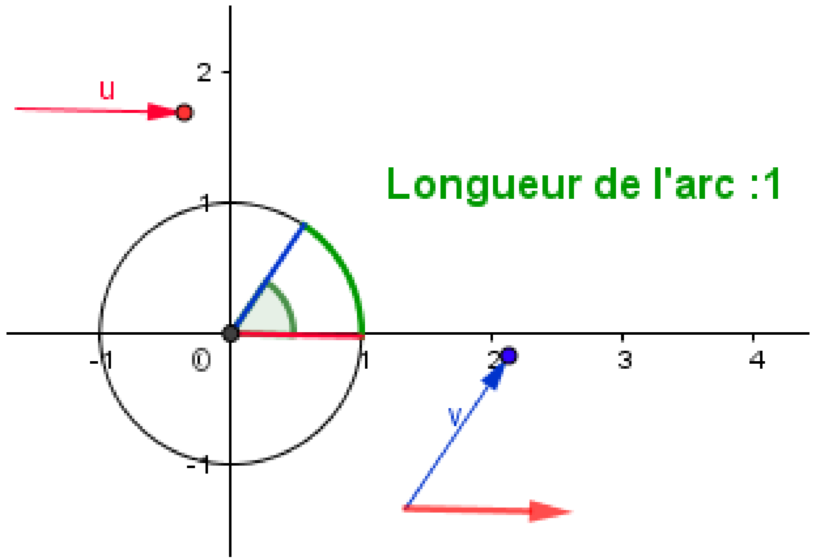
si $k > 0$, dans le sens direct

si $k < 0$, dans le sens indirect

Définition d'un angle orienté

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, on place sur le cercle trigonométrique les points M et N tels que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$



On appelle **angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$**, la longueur de l'arc orienté $\widehat{MN}$.

L'unité de mesure est le **radian**.

Exemple n°2 :

Convertir les angles suivants :

Degré	**180°**	**60°**	**30°**	**90°**	**45°**	**360°**
Radian						

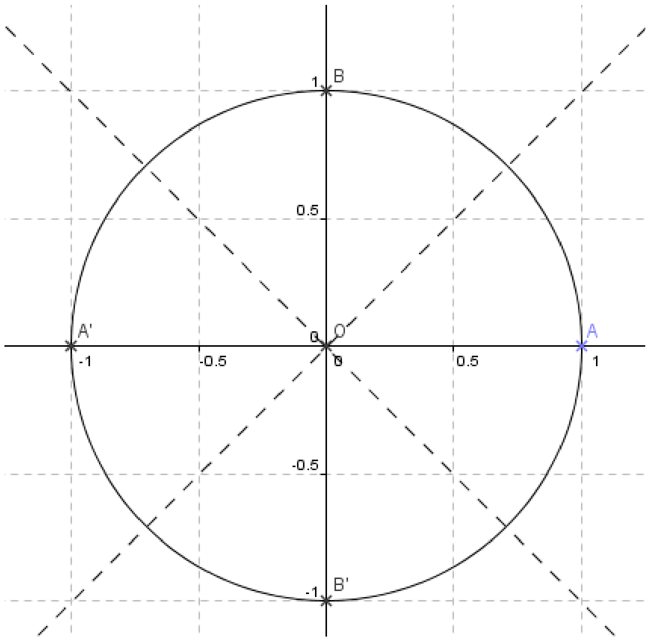
Propriété

Un angle orienté admet une infinité de mesures, elles sont toutes égales à 2π près. On dit que les angles sont définis modulo 2π et on note $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \quad [2\pi]$ (ou à 2π près).

Définition

On appelle **mesure principale de l'angle orienté en radian** la seule de ses mesures qui appartienne à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

Exemple n°3 :



Déterminer la mesure principale des angles suivants :

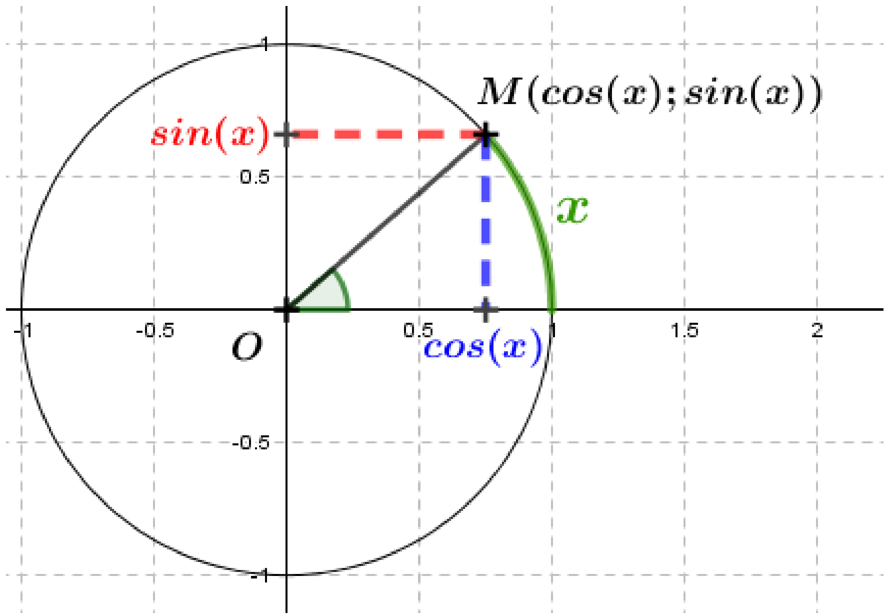
$$(\vec{x},\vec{y}) = 5\pi$$

$$(\vec{u},\vec{v}) = \frac{-13\pi}{3}$$

$$(\vec{v},\vec{w}) = \frac{-5197\pi}{4}$$

II. Lignes trigonométriques

Définition.



Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormal direct et $x \in \mathbb{R}$.

On note M le point du cercle trigonométrique associé au réel x, c'est-à-dire que l'angle orienté $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ a pour mesure x radians.

On appelle **cosinus du réel x** l'abscisse du point M et **sinus du réel x** l'ordonnée du point M :

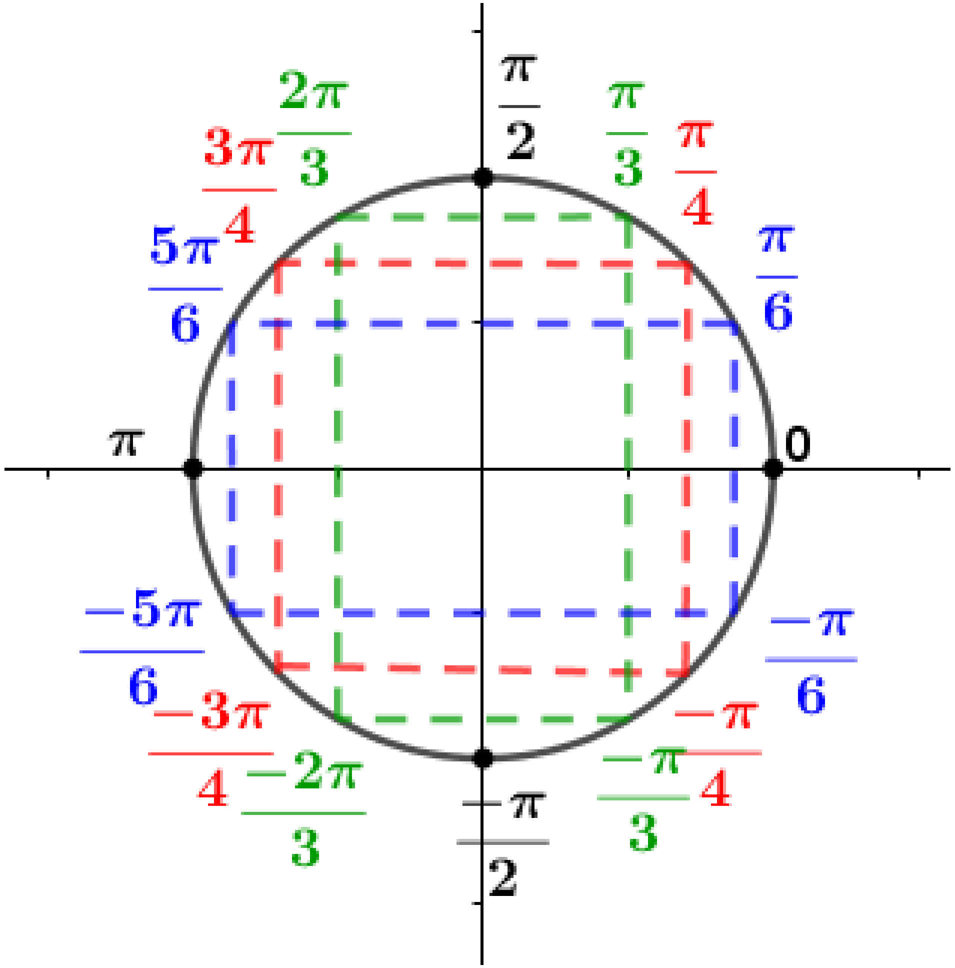
$$M(\cos(x)\,;\sin(x)) \qquad \overrightarrow{OM} = \cos(x)\,\vec{\imath} + \sin(x)\,\vec{\jmath}$$

Conséquences, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

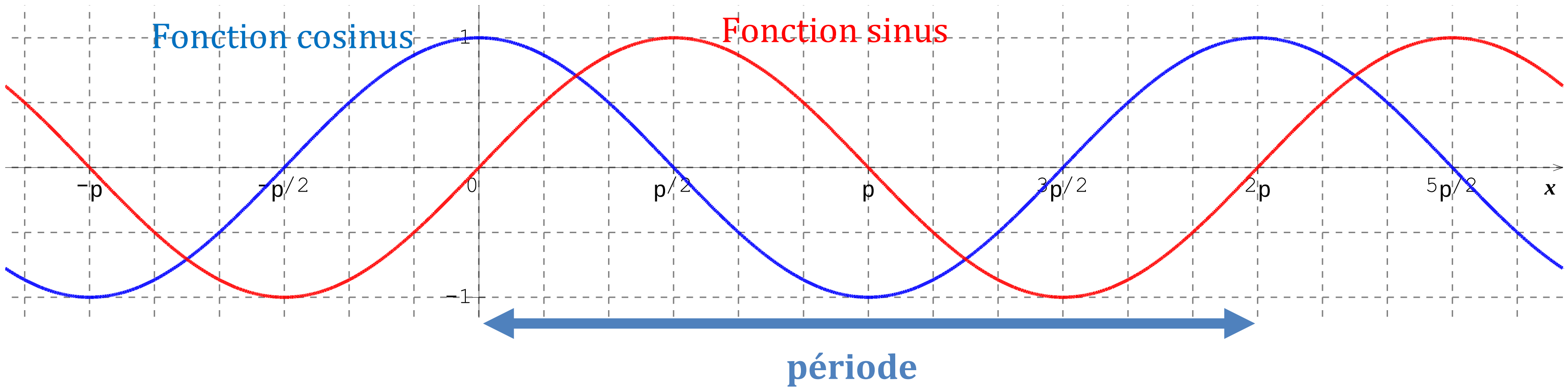
- $\boldsymbol{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$
- $\boldsymbol{-1 \leq \cos(x) \leq 1}$ et $\boldsymbol{-1 \leq \sin(x) \leq 1}$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ soit **$x \mapsto \cos(x)$ est 2π-périodique**
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ soit **$x \mapsto \sin(x)$ est 2π-périodique**
- $\cos(-x) = \cos(x)$ soit **$x \mapsto \cos(x)$ est paire**
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ soit **$x \mapsto \sin(x)$ est impaire**

Tableau de synthèse.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1



$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
π
0
$\frac{-5\pi}{6}$
$\frac{-3\pi}{4}$
$\frac{-2\pi}{3}$
$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{-\pi}{3}$
$\frac{-\pi}{4}$
$\frac{-\pi}{6}$


Fonction cosinus
Fonction sinus
1
−1
0
x
période

Exemple n°4 :

The figure contains a semicircle and a quarter-circle. Prove that the red and blue areas are equal.