Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Philosophe, mathématicien, diplomate, juriste et bibliothécaire allemand. Il a, entre autres, participé au développement du calcul infinitésimal.

I. Nombre dérivé et tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$, $b \in I$ et $a \neq b$.

Définition

On appelle **taux de variation** de la fonction f entre a et b le quotient : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

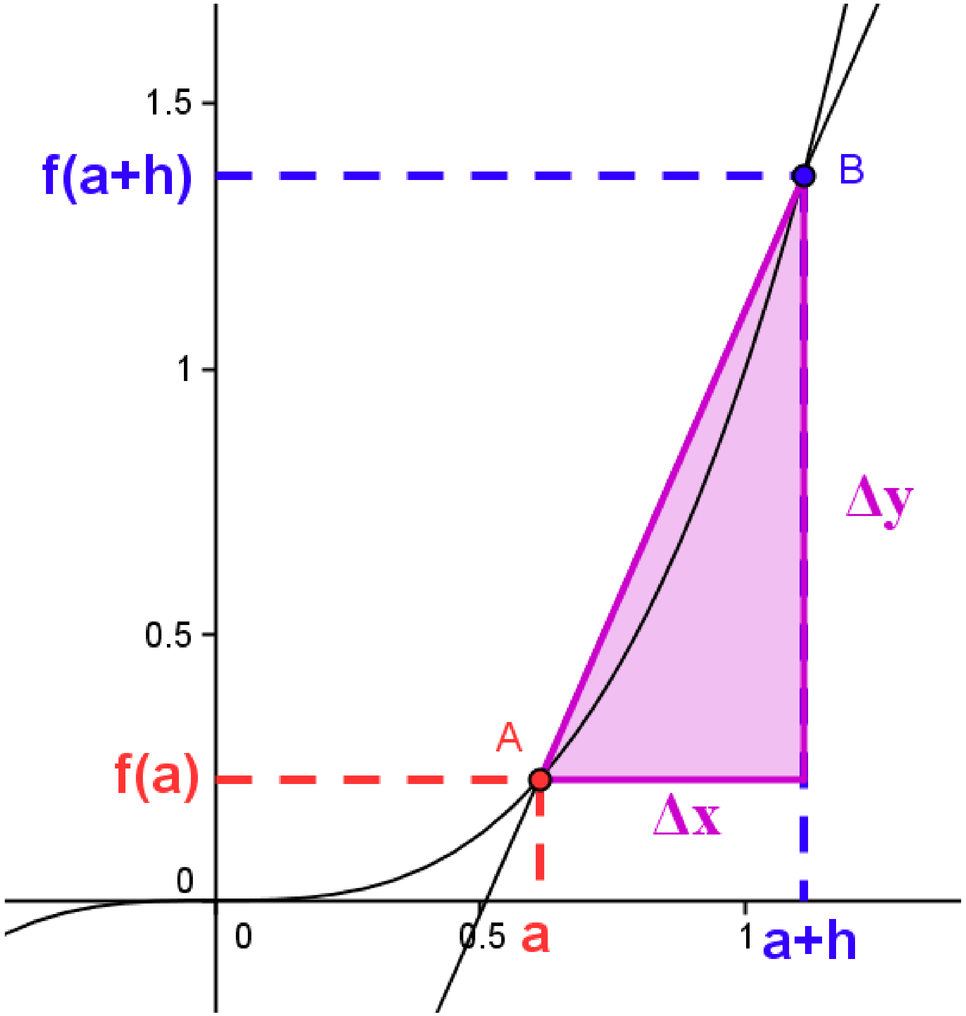
Si on pose $b = a + h$, le taux devient

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Interprétation graphique

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

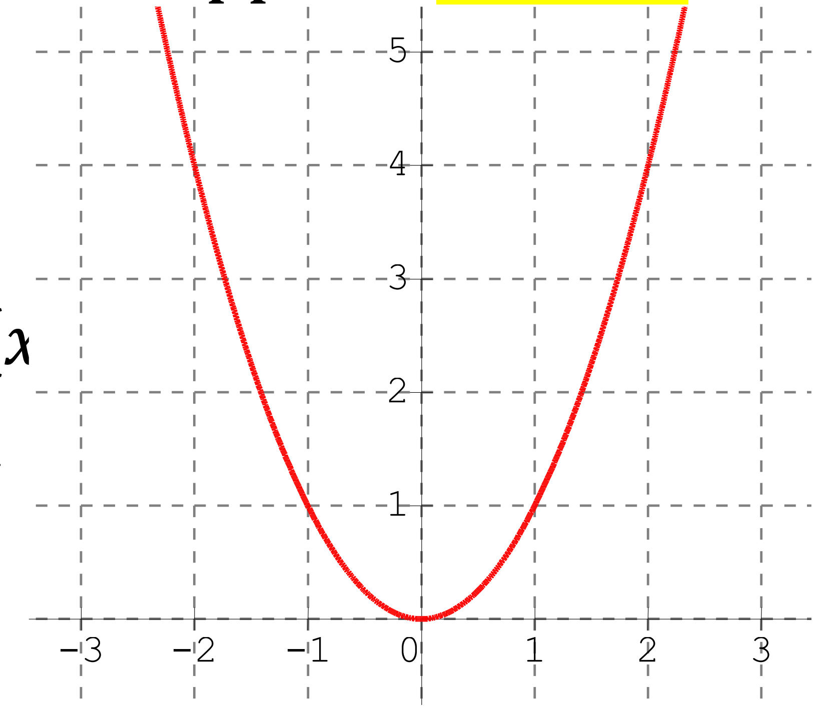
Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante (AB) où $A\big(a;f(a)\big)$ et $B\big(a+h;f(a+h)\big)$.



Définition

Soit f définie sur I, $a \in I$ et $a + h \in I$ pour h proche de 0.

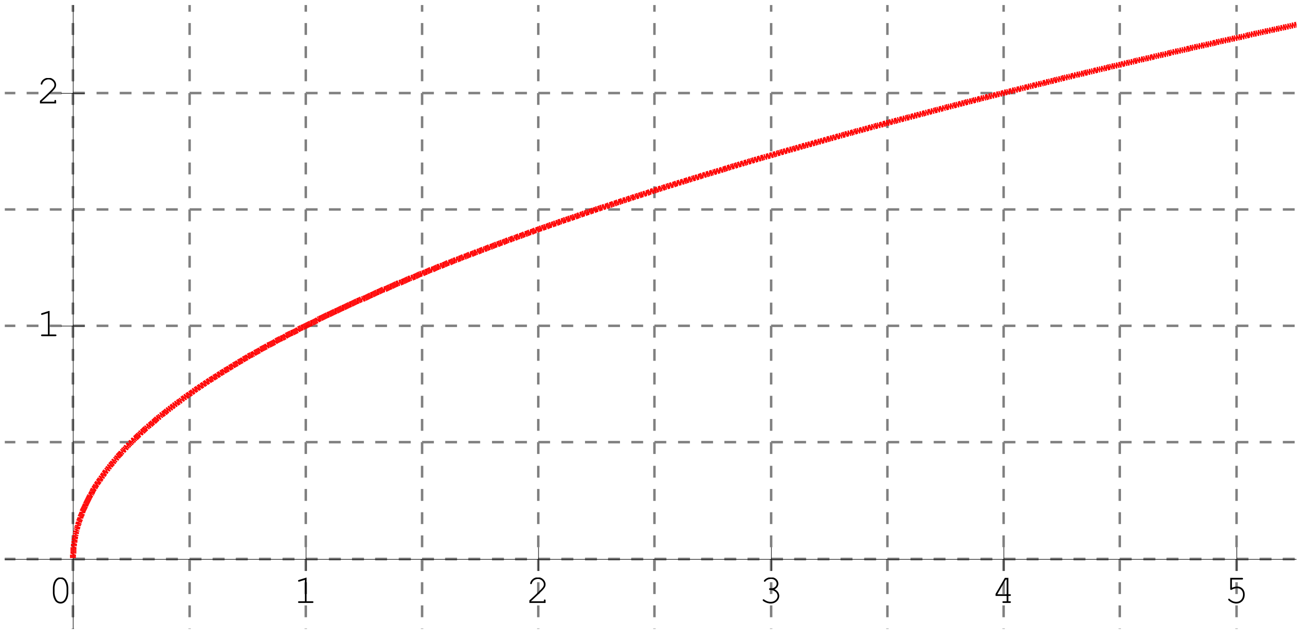
On dit que f est **dérivable en a** lorsque la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est finie quand h tend vers 0, cette limite est appelée **nombre dérivé de f en a** et noté $f'(a)$.



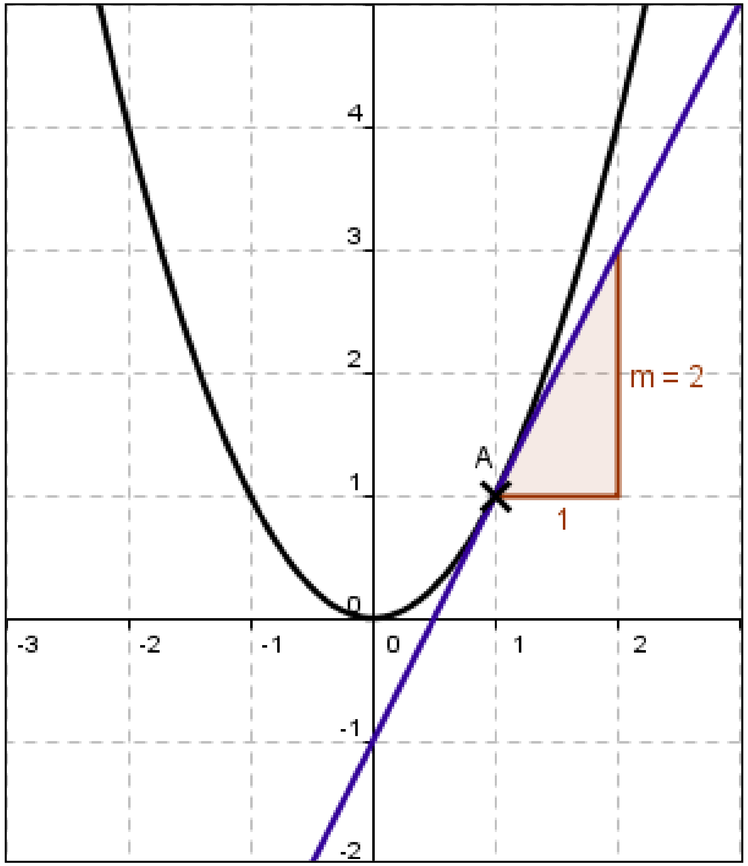
Exemples

▶ 1. Déterminer le nombre dérivé de $f(x$
x^2 en $a = -1$ puis tracer la tangente en -1.

▶ 2. Déterminer le nombre dérivé de $g(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$ puis tracer la tangente en 1.



Propriété



Soit C_f la courbe de f.

Soit $A \in C_f$ tel que $A\left(a; f(a)\right)$

Si f est dérivable en a alors $f'(a)$ est le

coefficient directeur de la tangente à

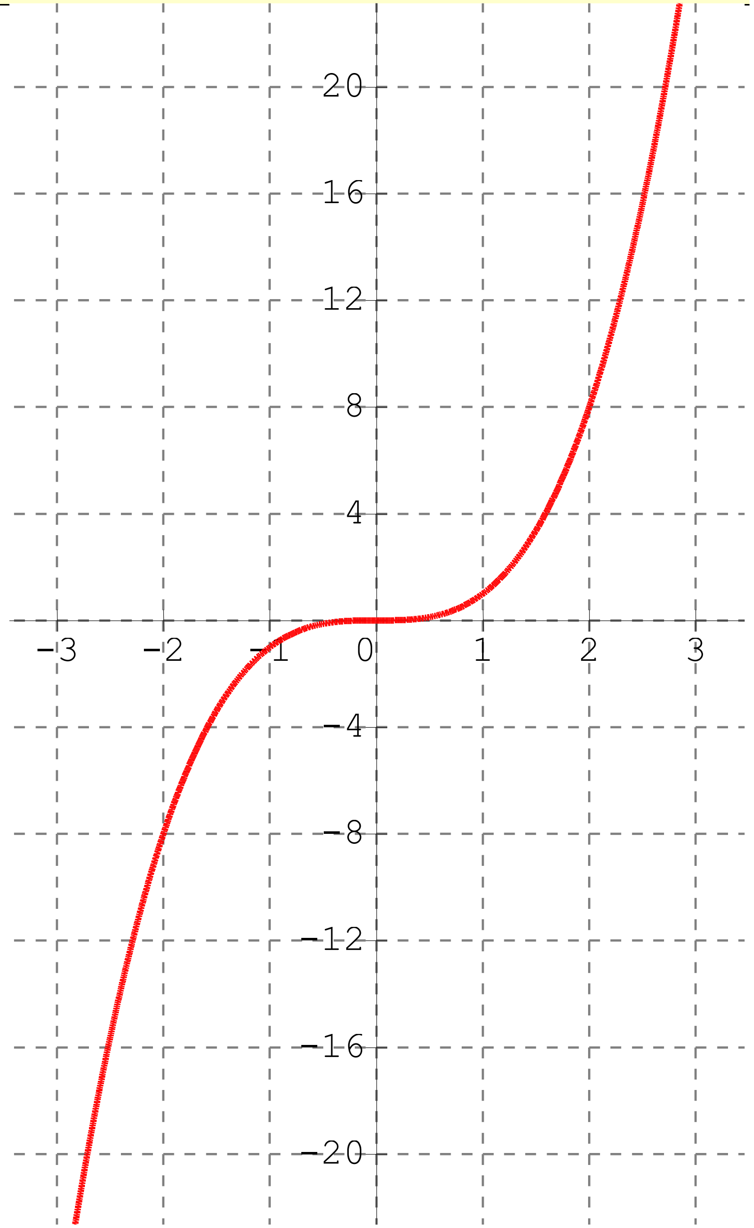
C_f au point A.

L'équation de la tangente à C_f

au point A est : $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

Exemple

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ au point d'abscisse 2.



$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^3-8}{h}=\frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{12h+6h^2+h^3}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=12+6h+h^2$$

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est 12. L'équation est donc $y=12x+b$

or si $x=2$ alors $y=8$ donc

$$8=12\times 2+b \Leftrightarrow b=8-24=-16$$

La tangente au point 2 a donc pour équation $y=12x-16$

II. Fonction dérivée

Définition

Si f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I alors on dit que f est **dérivable** sur I.

La fonction qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f sur I notée f'.

Fonction dérivable sur un intervalle I

$f(x)$	$f'(x)$	sur I
a constante	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ $]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Théorème Somme de fonctions dérivables

Si u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I

alors la fonction $u + v$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$$

Exemple 1.

$\forall x \in [0; +\infty[,\ f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + \sqrt{x}$

Théorème Produit de fonctions dérivables

Si u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I

alors la fonction $u \times v$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$$

Exemple 2.

$\forall x \in [0; +\infty[,\ f(x) = \sqrt{x}(-3x - 4)$

Démonstration :

Pour tout $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in I$

$$\frac{uv(x+h) - uv(x)}{h} = \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x+h) + u(x) \times v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h}$$

$$= \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x+h) + u(x)[v(x+h) - v(x)]}{h}$$

$$= \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x+h)}{h} + \frac{u(x)[v(x+h) - v(x)]}{h}$$

$$= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$ car u est dérivable sur I

et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$ car v est dérivable sur I

et aussi $\lim\limits_{h \to 0} v(x+h) = v(x)$

donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{uv(x+h) - uv(x)}{h} = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ ■

Corollaire :

Si k est une constante et u une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $k \times u$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{(ku)' = ku'}$$

Exemple 3.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x - 7$

Théorème Inverse d'une fonction dérivable

Si u désigne une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}}$$

Exemple 4.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Théorème Quotient de fonctions dérivables

Si u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I et v ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I

$$\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Exemple 5.

$\forall x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[,\ f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$

Théorème Composées de fonctions

Si f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I et, pour tout $x \in J$, $ax+b \in I$ alors la fonction $f(ax+b)$ est dérivable sur J

$$\boldsymbol{\left(f(ax+b)\right)' = f'(ax+b) \times a}$$

Exemple 6.

$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[, f(x) = \sqrt{4x+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (2+3x)^7$

Si f est dérivable sur I et paire alors f' est impaire.

III. Etude des variations d'une fonction

Théorème. Variations d'une fonction

• Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) > 0$ alors f est **strictement croissante** sur I.

• Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) < 0$ alors f est **strictement décroissante** sur I.

• Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I.

Point méthode

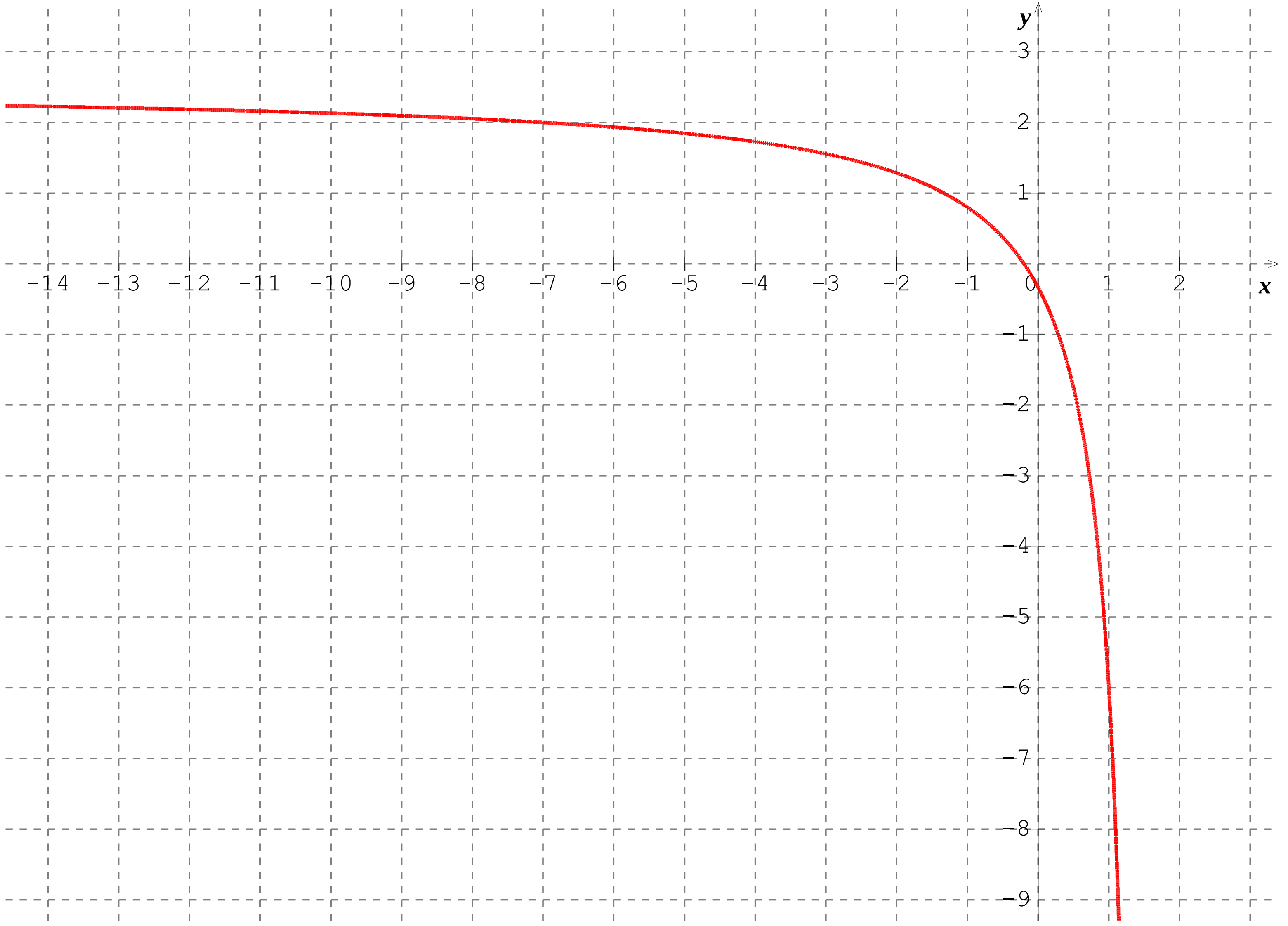
Etudier les variations d'une fonction

$f(x)$	• Pour étudier les variations d'une fonction
$f'(x)$	• Je calcule la dérivée de la fonction
$f'(x) > 0$	• J'étudie le signe de la dérivée
Tableau	• Je conclus en dressant le tableau de variations

Exemples :

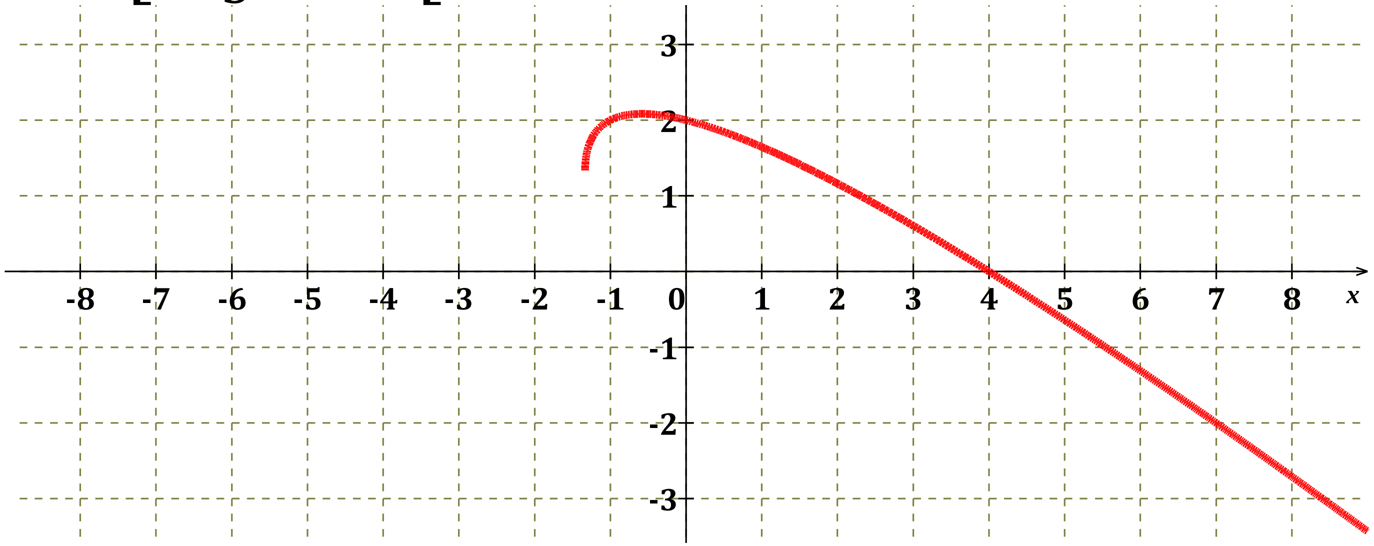
① Lorsque la dérivée est de signe constant :

Démontrer la monotonie de la fonction $f(x) = \frac{5x+1}{2x-3}$ sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$.


y
3
2
1
0
x
−14
−13
−12
−11
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9

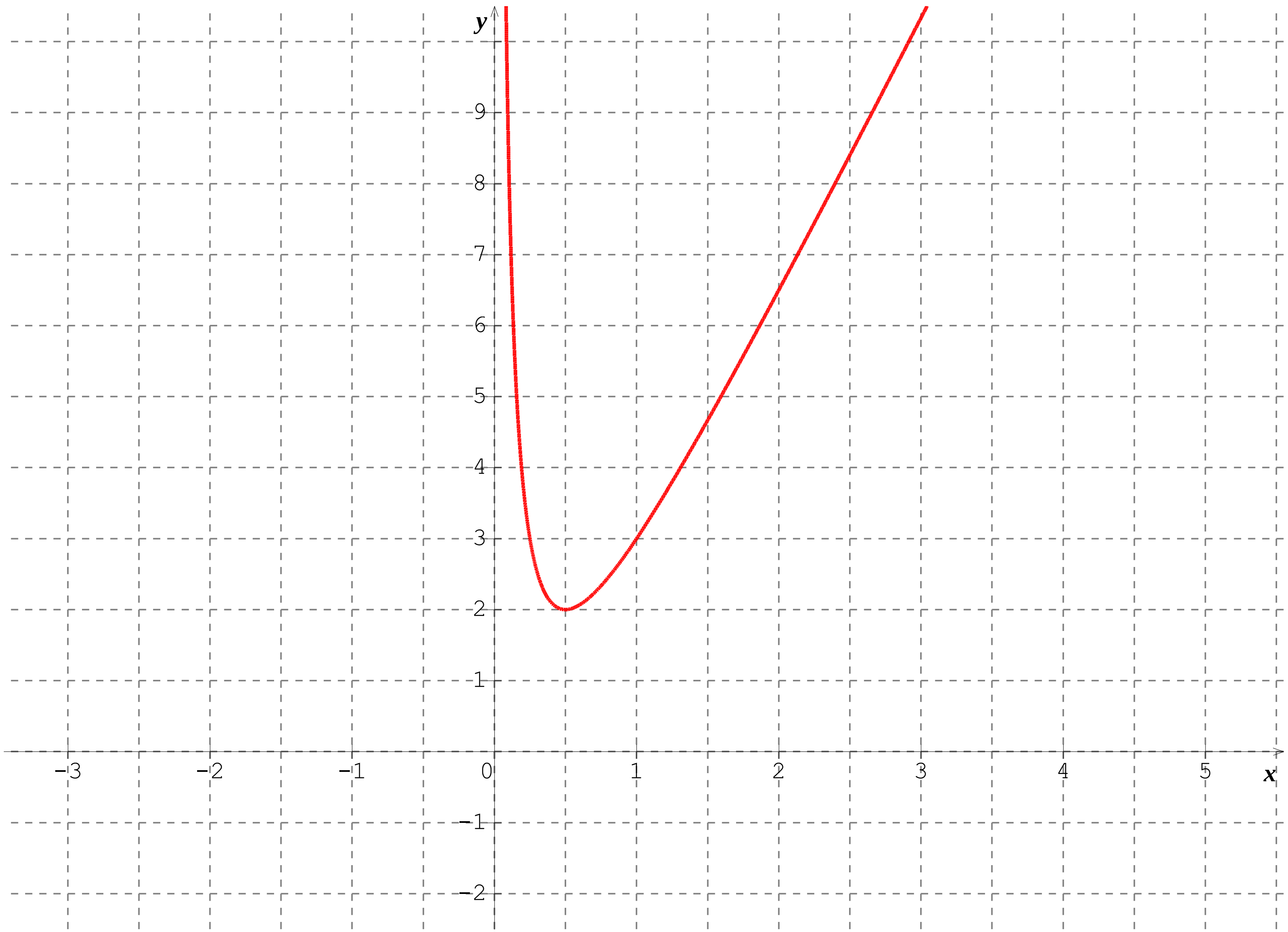
② Lorsque la dérivée est un polynôme du 1er degré :

Dresser le tableau de variations de $f(x) = \sqrt{3x+4} - x$ sur $\left[-\frac{4}{3} ; +\infty\right[$.



③ Lorsque la dérivée est un polynôme du 2^{nd} degré :

Déterminer l'extremum de $f(x) = 4x - 2 + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.



y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
x