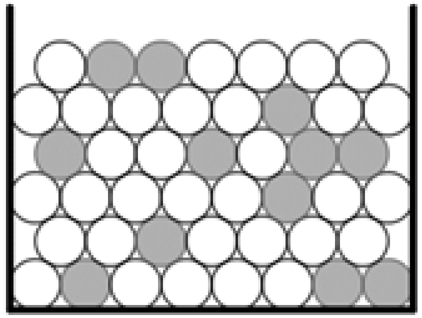
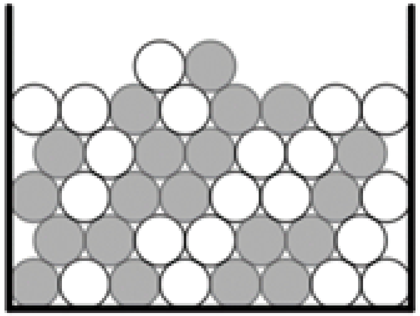
Blaise Pascal (1623-1662)

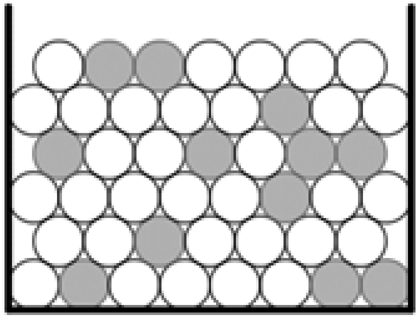
Mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français. Il contribue à l'étude des fluides et clarifie les concepts de pression et de vide. À 19 ans, il invente la première machine à calculer. En 1654, il publie une méthode de résolution du « problème des partis » qui donne naissance au calcul des probabilités.

I. Conditionnement par un événement

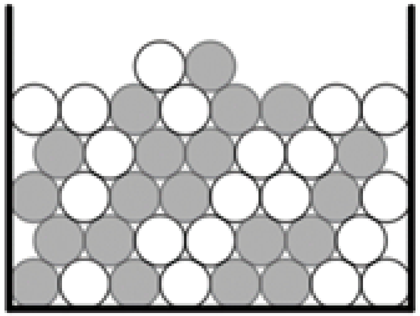
Exemple :
Dans l'urne E, on a placé 12 boules noires et 33 blanches.
Dans l'urne F, on a placé 20 boules de chaque couleur. Les boules sont indiscernables au toucher.
On choisit sans préférence particulière une des urnes au hasard et dans cette urne, on tire une boule au hasard.


Urne E


Urne F



Urne E



Urne F

▶1a) Sachant que la boule provient de l'urne E, quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

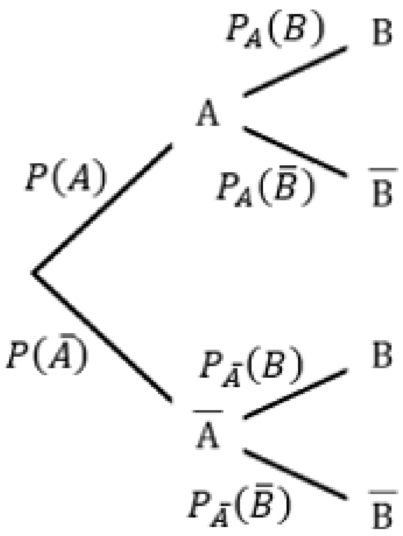
b) Sachant que la boule provient de l'urne F, quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

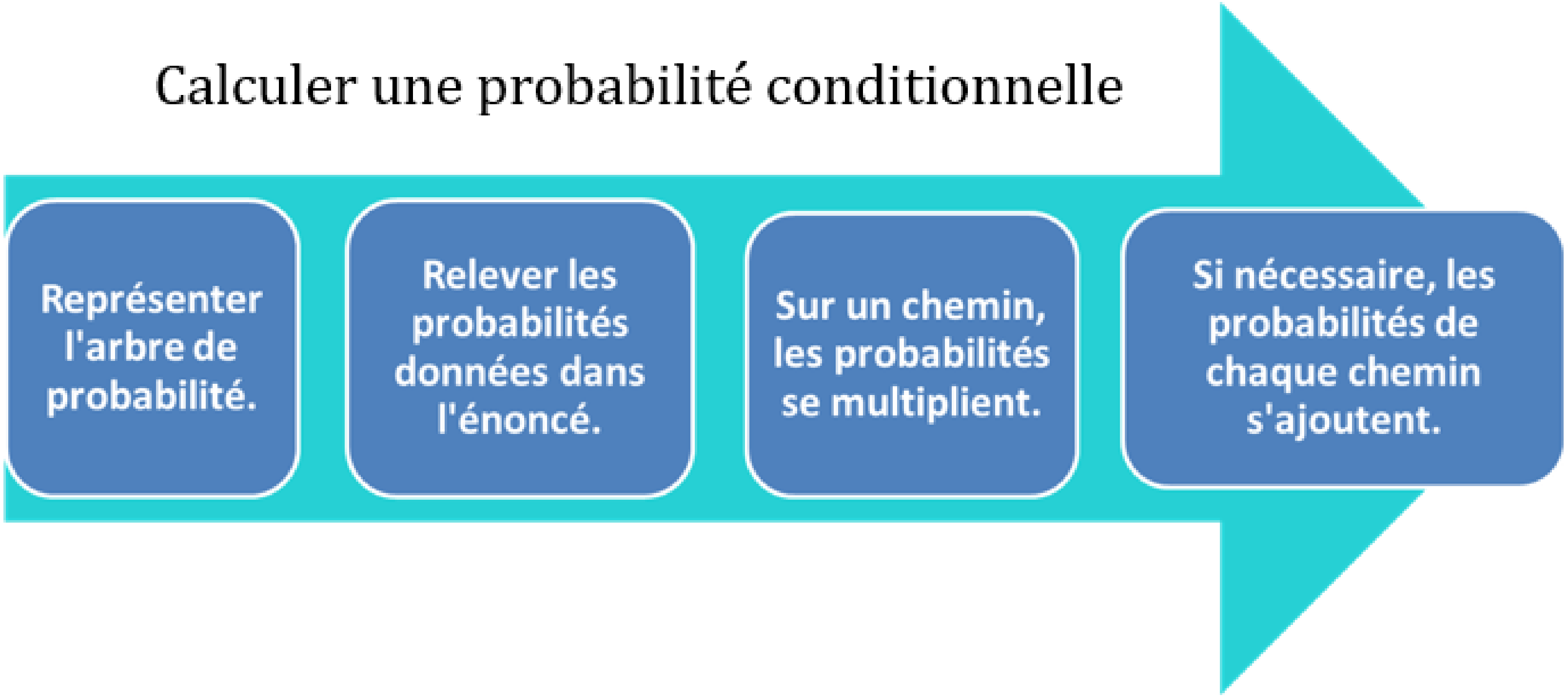
c) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?

▶2. Sachant que la boule est noire, quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans l'urne E ?

Point méthode

Calculer une probabilité conditionnelle





Définition :

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Conséquence :

La probabilité de l'intersection entre A et B est :

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}.$$

Exemple :

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.
L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que 40% de la population est vaccinée, 5% des personnes vaccinées ont contracté la

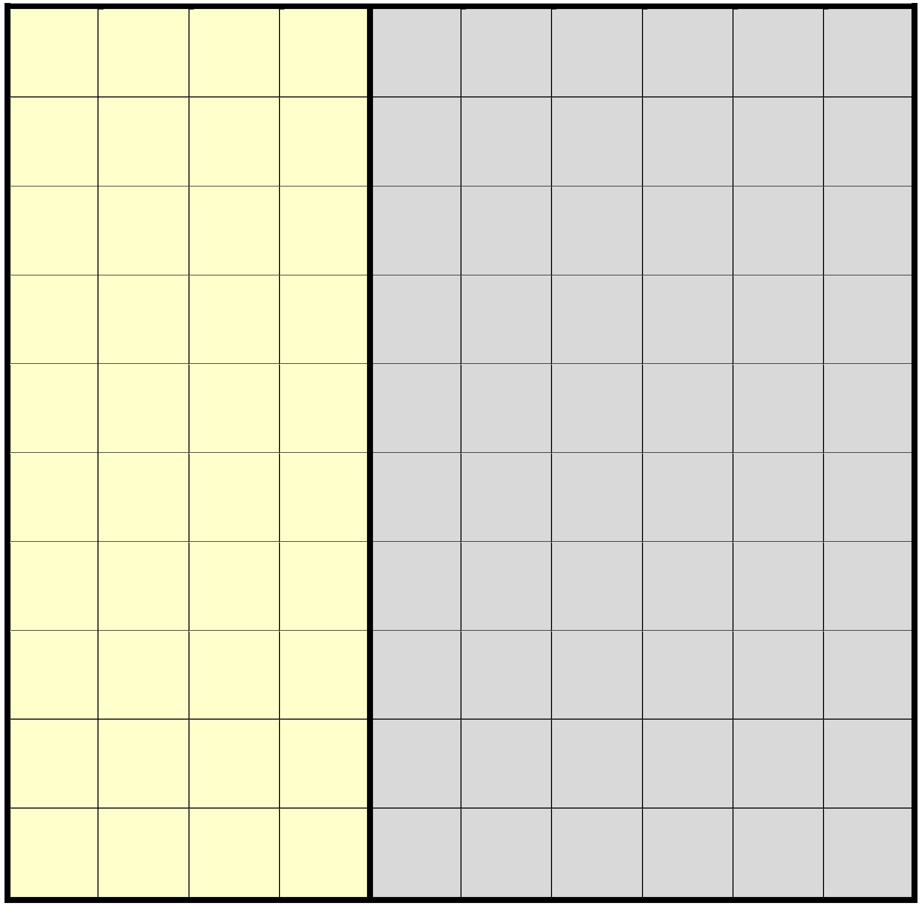
grippe et 25% des personnes non vaccinées ont contracté la grippe.

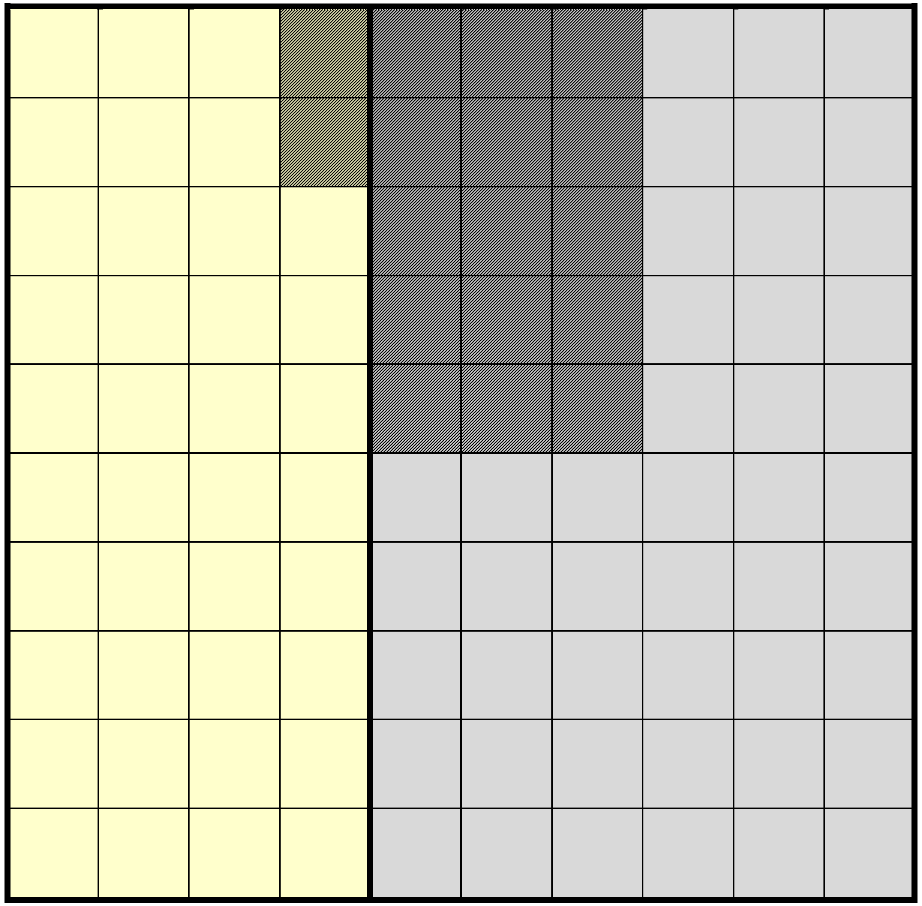
▶ 1a) Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

b) Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et ne soit pas vaccinée.

c) Donner la probabilité qu'une personne prise au hasard ait contracté la grippe.

▶ 2. La personne choisie a contracté la grippe. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas vaccinée ?





II. Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation ou non de B n'a pas d'influence sur la réalisation de A donc

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{et} \quad P_A(B) = P(B)$$

or $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Définition

Deux **événements** A et B sont **indépendants** lorsque

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Je veux savoir si les événements A et B sont indépendants

Je calcule $P(A \cap B)$ puis $P(A)$ et $P(B)$

Si $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ alors A et B ne sont pas indépendants

Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors A et B sont indépendants

L'énoncé me dit que les événements A et B sont indépendants

Je peux calculer $P(A \cap B)$ en utilisant la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple 1.

Pour atteindre le premier étage d'une tour, il est nécessaire d'utiliser deux ascenseurs qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre. Chaque jour, les probabilités de tomber en panne sont respectivement de 1% pour le premier ascenseur et de 0,6% pour le second.

Quelle est la probabilité que les deux ascenseurs tombent en panne le même jour ?

Exemple 2.

On lance un dé six faces.
A l'événement « On obtient un nombre pair »
B l'événement « On obtient un multiple de 3 »

▶1. Lorsque le dé n'est pas pipé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

▶2. Le dé est pipé de la façon suivante : les faces 2, 3 et 4 ont deux fois plus de chance d'apparaître que la face 1, les faces 5 et 6 ont une fois et demi de plus de chance d'apparaître que la face 1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
▶1. Lorsque le dé n'est pas pipé.

$$A = \{2; 4; 6\} \quad \text{et} \quad B = \{3; 6\} \ \text{donc} \ \ A \cap B = \{6\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A) \times P(B)$$

donc les événements A et B sont indépendants.

Remarque : $P_B(A) = \frac{1}{2} = P(A)$ et $P_A(B) = \frac{1}{3} = P(B)$

▶ 2. Lorsque le dé est pipé :

Notons x la probabilité que la face soit 1, la probabilité que la face soit 2, 3 ou 4 est $2x$ et la probabilité que la face soit 5 ou 6 est $1{,}5x$.

$$x + 3 \times 2x + \times 2 \times 1{,}5x = 10x = 1$$
$$\text{donc } x = 0{,}1$$

Face	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,1	0,2	0,2	0,2	0,15	0,15

$$P(A) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}55 \qquad P(B) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$$
$$P(A \cap B) = 0{,}15$$

$$P(A) \times P(B) = 0{,}55 \times 0{,}35 = 0{,}1925$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Remarque : $P_B(A) = \frac{0{,}15}{0{,}35} \approx 0{,}43 \neq P(A)$

et $P_A(B) = \frac{0{,}15}{0{,}55} \approx 0{,}27 \neq P(B)$

III. Les variables aléatoires

Définition.
On appelle variable aléatoire X une fonction qui, à chaque résultat d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel.

La **loi de probabilité de X** associe à chaque valeur de X sa probabilité $P(X = x_i)$.

x_i	...	Total
$P(X = x_i)$		1

On appelle **espérance d'une variable aléatoire *X*** le nombre :

$$\boldsymbol{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i) = x_1 P(X = x_1) + \cdots + x_n P(X = x_n)$$

L'espérance représente la valeur moyenne que l'on peut espérer obtenir si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple 3.

Parmi les 2 jeux suivants lequel est le plus intéressant au niveau du gain ?

- **Jeu n°1 :** on joue à Pile ou Face deux fois, un double Pile rapporte 4 euros et le reste fait perdre 1 euro.

- **Jeu n°2 :** on tire une carte au hasard sur 32 cartes, le valet de pique rapporte 30 euros, les autres cartes font perdre 1 euro.

Définition :

On appelle **variance d'une variable aléatoire X** le nombre :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times \left(x_i - E(X)\right)^2 = \boldsymbol{E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

et **l'écart type** :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart-type est une mesure de la dispersion des valeurs d'une distribution de probabilité.

Exemple 4.

Un joueur paie 15 euros pour jeter au hasard un dé équilibré. Il gagnera :

- 15 euros s'il obtient le 1 ;
- 5 euros s'il obtient le 2 ou le 3 ;
- 60 euros s'il obtient le 6 ;
- 0 dans les autres cas.

Calculer le gain moyen du joueur ainsi que l'écart-type.

Notons X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur :

La loi de X est :

Valeurs	$\mathbf{-15}$	$\mathbf{-10}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{45}$	**Total**
Probabilités	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

L'espérance de X vaut :

$$E(X)=\frac{-30}{6}-\frac{20}{6}+\frac{45}{6}=\frac{-5}{6}\approx -0{,}83$$

Valeurs de X^2	225	100	0	2025	Total
Probabilités	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X^2) = \frac{450}{6} + \frac{200}{6} + \frac{2025}{6} = \frac{2675}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{2675}{6} - \left(\frac{-5}{6}\right)^2 = \frac{16025}{36}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 21{,}1$$