LYCEE Polyvalent Albert EINSTEIN

Révision Second Degré
Première ➡ Préparation du Contrôle
Spécialité Mathématiques

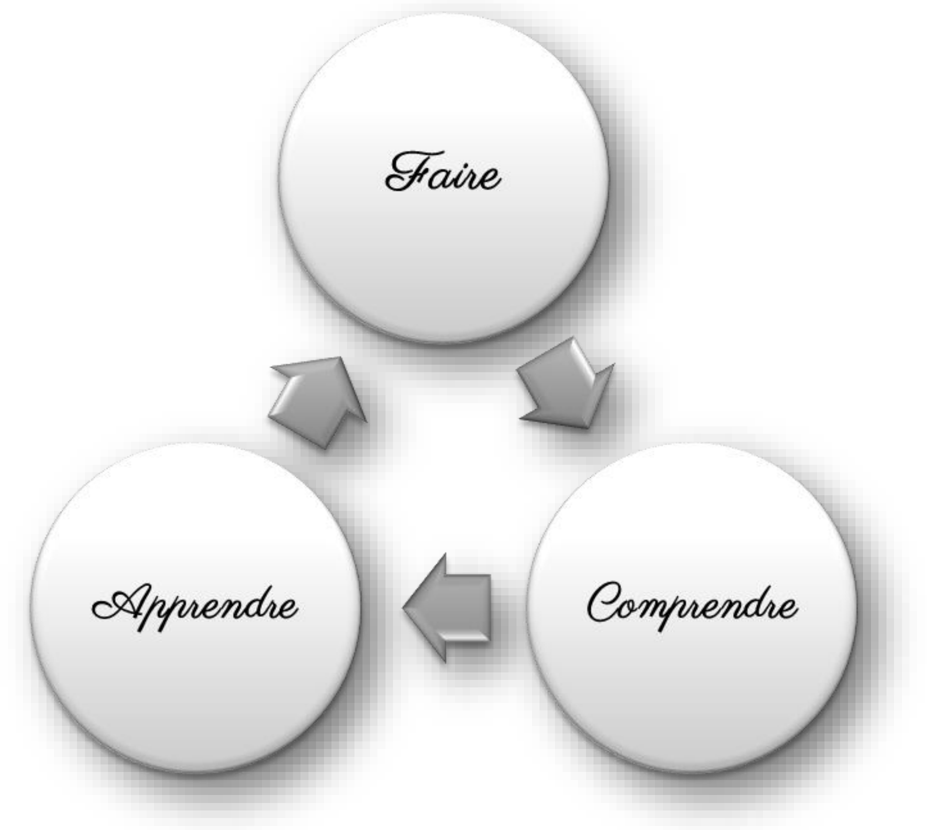


Table des matières

Première ⇨ Préparation du Contrôle

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1. Discriminant

▶ 1. Résoudre l'équation $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

▶ 2. Factoriser le polynôme $P(x) = 3x^2 + 3x - 6$.

▶ 3. Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{1}{2x^2 - x + 1}$?

Exercice 2. Extremum

On considère la fonction polynomiale $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

▶ 1. Donner, en détaillant, la forme canonique de f.

▶ 2. En déduire un extremum de la fonction f et la valeur de x pour laquelle l'extremum est atteint.

▶ 3. Sans faire de calcul, que peut-on dire de l'équation $2x^2 - 12x + 22 = 3$?

Exercice 3. Résolution d'équation

Résoudre les équations suivantes :

$a)$ $9x - 12\sqrt{x} + 4 = 0$ $\quad$ $b)$ $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$ $\quad$ c) $\frac{x}{x^2 - 8} = 3$

Exercice 4. Parc rectangulaire

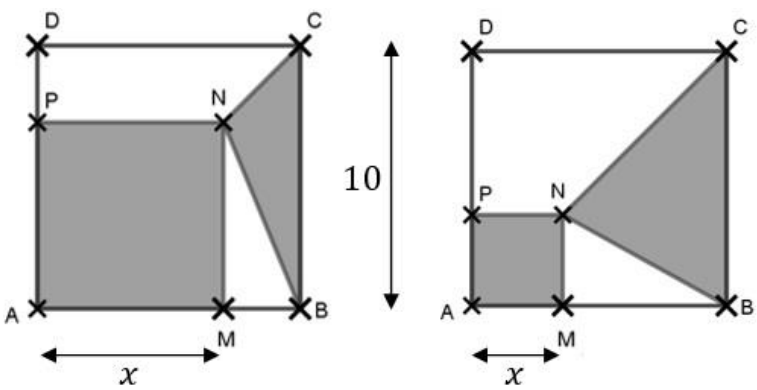
On souhaite construire un parc rectangulaire de périmètre 270 m et d'aire 3224 m^2.

Quelles doivent être ses dimensions ?

Exercice 5. Aire mobile

$ABCD$ est un carré de côté 10 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[AB]$, on note x la longueur AM. On construit le carré $AMNP$ et le triangle NBC.

Pour tout $x \in [0; 10]$, on note $f(x)$ l'aire grisée.



▶ 1. Démontrer que, pour tout $x \in [0; 5]$, $f(x) = x^2 - 5x + 50$.

▶ 2a) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique.

b) Pour quelle valeur de x, l'aire est-elle minimale, et, que vaut ce minimum ?

Première ➡ Préparation du Contrôle
Spécialité Mathématiques
Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. Discriminant

▶1. Résoudre l'équation $9x^2 - 12x + 4 = 0$.
▶2. Factoriser le polynôme $P(x) = 3x^2 + 3x - 6$.
▶3. Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{1}{2x^2-x+1}$?

Exercice 1.	**1.**	$\Delta = 144 - 4 \times 4 \times 9 = 0$, l'équation possède donc une seule solution : $$x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$
	2.	On cherche les racines de $3x^2 + 3x - 6$ $\Delta = 9 - 4 \times (-18) = 81 > 0$, $P(x)$ possède deux racines : $x_1 = \frac{-3-9}{6} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+9}{6} = 1$ alors $P(x) = 3(x-1)(x+2)$
	3.	On cherche les racines de $2x^2 - x + 1$ $\Delta = 1 - 4 \times 2 = -7 < 0$, $2x^2 - x + 1$ ne possède pas de racine donc la fonction f ne possède pas de valeurs interdites donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2. Extremum

On considère la fonction polynomiale $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$
▶1. Donner, en détaillant, la forme canonique de f.
▶2. En déduire un extremum de la fonction f et la valeur de x pour laquelle l'extremum est atteint.
▶3. Sans faire de calcul, que peut-on dire de l'équation $2x^2 - 12x + 22 = 3$?

Exercice 2.	**1.**	$f(x) = 2x^2 - 12x + 22$ $f(x) = 2(x^2 - 6x) + 22$ $f(x) = 2[(x-3)^2 - 9] + 22$ $f(x) = 2(x-3)^2 - 18 + 22$ $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$
	2.	Pour tout réel x, $(x-3)^2 \geq 0$ $2(x-3)^2 \geq 0$ $2(x-3)^2 + 4 \geq 4$ La fonction f admet donc 4 comme minimum atteint pour $x = 3$.
	3.	L'équation $2x^2 - 12x + 22 = 3$ n'a pas de solution car 4 est la valeur minimale de f.

Correction de l'exercice 3. Résolution d'équation

Résoudre les équations suivantes :

$a)$ $9x - 12\sqrt{x} + 4 = 0$ $\quad$ $b)$ $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$ $\quad$ c) $\dfrac{x}{x^2 - 8} = 3$

Exercice 3.	**a)**	(E) $9x - 12\sqrt{x} + 4 = 0$, on pose $X = \sqrt{x}$ donc $X^2 = x$ et (E') $9X^2 - 12X + 4 = 0$ $\Delta = 144 - 4 \times 4 \times 9 = 0$, (E') n'a donc qu'une seule solution : $X = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3} = \sqrt{x}$ $x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$ donc $S = \left\{\dfrac{4}{9}\right\}$
	b)	(E) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$, on pose $X = x^2$ donc $X^2 = x^4$ et (E') $X^2 - 6X - 16 = 0$ $\Delta = 36 - 4 \times (-16) = 100 > 0$, il y a alors deux solutions : $X_1 = \dfrac{6+10}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ et $X_2 = \dfrac{6-10}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$ alors $x^2 = 8 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $x_2 = -2\sqrt{2}$ et $x^2 = -2$ n'a pas de solution donc $S = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$
	c)	$\dfrac{x}{x^2 - 8} - 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - 3(x^2 - 8)}{x^2 - 8} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x^2 + x + 24}{x^2 - 8} = 0$ $\Delta = 1 - 4 \times 24 \times (-3) = 289$ $x_1 = \dfrac{-1 - 17}{-6} = \dfrac{-18}{-6} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-1 + 17}{-6} = \dfrac{16}{-6} = -\dfrac{8}{3}$ Donc $S = \left\{-\frac{8}{3}; 3\right\}$

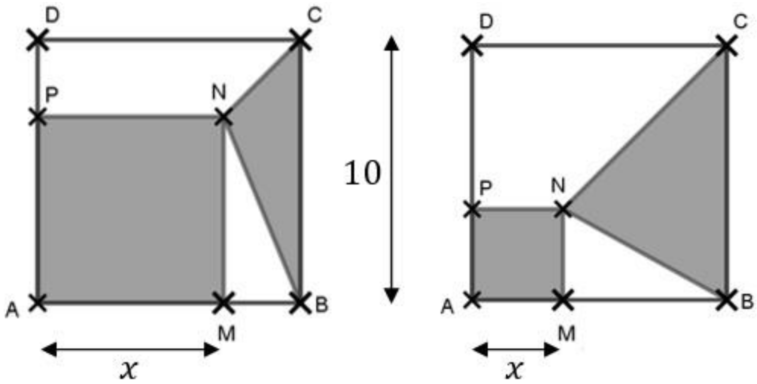
Correction de l'exercice 4. Parc rectangulaire

On souhaite construire un parc rectangulaire de périmètre 270 m et d'aire 3224 m^2.
Quelles doivent être ses dimensions ?

Exercice 4.	Notons x et y la longueur et la largeur du rectangle en mètre. On a alors $$\begin{cases}2x+2y=270\\ xy=3224\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=270-2x\\ xy=3224\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{270-2x}{2}\\ xy=3224\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=135-x\\ xy=3224\end{cases}$$ Résolvons $x(135-x)=3224$ $$135x-x^2=3224$$ $$\Leftrightarrow -x^2+135x-3224=0$$ $\Delta=18225-4\times 3224=5329$ $x_1=\dfrac{-135-73}{-2}=\dfrac{-208}{-2}=104$ et $x_2=\dfrac{-135+73}{-2}=\dfrac{-62}{-2}=31$ Le parc rectangulaire doit mesurer 104 mètres sur 31 mètres.

Correction de l'exercice 5. Aire mobile

$ABCD$ est un carré de côté 10 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[AB]$, on note x la longueur AM. On construit le carré $AMNP$ et le triangle NBC.
Pour tout $x\in[0;10]$, on note $f(x)$ l'aire grisée.



▶1. Démontrer que, pour tout $x\in[0;5]$, $f(x)=x^2-5x+50$.

▶2a) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique.

b) Pour quelle valeur de x, l'aire est-elle minimale, et, que vaut ce minimum ?

Exercice 5.	**1.**	Pour tout $x \in [0;5]$, $f(x)$ est l'aire grisée soit l'aire du carré $AMNP$ plus l'aire du triangle NBC. $f(x) = \text{aire du carré } AMNP + \text{aire du triangle } NBC$ $f(x) = \text{côté}^2 + \frac{b \times h}{2}$ $f(x) = AM^2 + \frac{BC \times h}{2}$ $f(x) = x^2 + \frac{10 \times (10 - x)}{2}$ $f(x) = x^2 + 5(10 - x)$ $f(x) = x^2 - 5x + 50$
	2a	$f(x) = x^2 - 5x + 50$ $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 50$ $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{200}{4}$ $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{175}{4}$
	2b	Pour tout $x \in [0;5]$, $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0$ $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{175}{4} \geq \frac{175}{4}$ $f(x) \geq \frac{175}{4}$ L'aire est minimale pour $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$ cm. L'aire minimum vaut $\frac{175}{4} = 43{,}75 \text{ cm}^2$.