

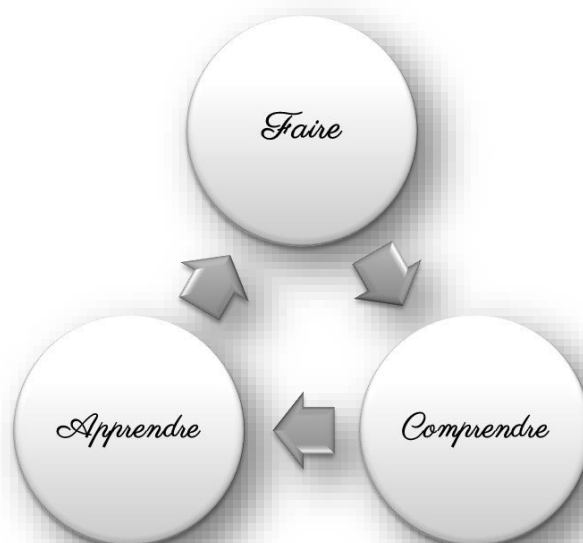


Table des matières

Enoncé des exercices	2
Exercice 1.	2
Exercice 2.	2
Exercice 3.	2
Exercice 4.	2
Exercice 5.	2
Correction des exercices	3
Correction de l'exercice 1.....	3
Correction de l'exercice 2.....	4
Correction de l'exercice 3.....	4
Correction de l'exercice 4.....	6
Correction de l'exercice 5.....	7

Première Préparation du contrôle
Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Enoncé des exercices

Exercice 1.

Résoudre les inéquations suivantes :

► 1. $-5x^2 - 24x + 5 < 0$

► 2. $x \geq \frac{5x - 9}{x - 1}$

Exercice 2.

On considère la fonction $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 9x - 18$

- 1. Calculer $P(-3)$. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?
- 2. Déterminer les nombres a , b et c tels que $P(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$.
- 3. Factoriser $P(x)$ sous forme de produits de polynômes de degré 1.

Exercice 3.

On lance une fusée du haut d'un immeuble de 24 mètres. On note t le temps en secondes et $f(t)$ la hauteur en mètres de la fusée en fonction du temps. On a : $f(t) = -16t^2 + 40t + 24$ pour tout $t \in [0; +\infty[$

- 1. Pour tout $t \in [0; +\infty[$, écrire $f(t)$ sous forme factorisée. Déterminer le temps nécessaire à la fusée pour qu'elle touche le sol.
- 2. Pour tout $t \in [0; +\infty[$, écrire $f(t)$ sous forme canonique. A quelle hauteur maximale s'élèvera la fusée et à quel instant atteindra-t-elle ce maximum ?
- 3. Pendant combien de temps la fusée restera-t-elle au-dessus du plafond de 40 m d'altitude ?

Exercice 4.

- 1. Soit la suite de terme général $u_n = 3 \times 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Déterminer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- 2. Soit la suite de terme général $v_n = n + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Déterminer $v_{n+1} - v_n$.
 - b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
- 3. Soit la suite de terme général $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Déterminer $w_{n+1} - w_n$.
 - b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n) .

Exercice 5.

- 1. On considère la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 2(n + 3) + 2$
 - a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.
 - b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer votre réponse.
 - 2. On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{n \times v_n}{n+1}$
 - a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.
 - b) Déterminer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

Première Préparation du contrôle
Spécialité Mathématiques
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Résoudre les inéquations suivantes :

► 1. $-5x^2 - 24x + 5 < 0$

► 2. $x \geq \frac{5x - 9}{x - 1}$



Exercice 1.

1.

$$-5x^2 - 24x + 5 < 0$$

$a = -5$, la parabole est tournée vers le bas
 $\Delta = 24^2 - 4 \times (-25) = 676 > 0$,
le polynôme possède donc deux racines :

$$x_1 = \frac{24 - 26}{-10} = \frac{-2}{-10} = 0,2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{24 + 26}{-10} = -\frac{50}{10} = -5$$

x	$-\infty$	-5	$0,2$	$+\infty$	
$-5x^2 - 24x + 5$	$-$	0	$+$	0	$-$

donc $S =]-\infty; -5[\cup]0,2; +\infty[$

2.

$$x \geq \frac{5x - 9}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{5x - 9}{x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x - 1) - (5x - 9)}{x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - (5x - 9)}{x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 5x + 9}{x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 1} \geq 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

$a = 1$, la parabole est tournée vers le haut,
 $\Delta = 36 - 4 \times 9 = 0$,
le polynôme possède une racine : $x = \frac{6}{2} = 3$

- 2. Pour tout $t \in [0; +\infty[$, écrire $f(t)$ sous forme canonique. A quelle hauteur maximale s'élèvera la fusée et à quel instant atteindra-t-elle ce maximum ?
- 3. Pendant combien de temps la fusée restera-t-elle au-dessus du plafond de 40 m d'altitude ?



Exercice 3.

1.

$$f(t) = -16t^2 + 40t + 24 = 0$$

$$\Delta = 40^2 - 4 \times (-16) \times 24 = 3136 > 0$$

Les deux solutions sont donc :

$$t_1 = \frac{-40 - \sqrt{3136}}{2 \times (-16)} = \frac{-96}{-32} = \frac{-96}{-32} = 3$$

et $t_2 = \frac{-40 + \sqrt{3136}}{2 \times (-16)} = -0,5 < 0$

Pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$f(t) = -16(t - 3)\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

La 2^e solution, négative, est exclu donc le temps nécessaire à la fusée pour qu'elle touche le sol est 3 secondes.

2.

Pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$f(t) = -16t^2 + 40t + 24$$

$$f(t) = -16\left(t^2 - \frac{5}{2}t\right) + 24 = -16\left[\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] + 24$$

$$f(t) = -16\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + 25 + 24$$

$$f(t) = -16\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + 49$$

$$\forall t \in [0; +\infty[, \left(t - \frac{5}{4}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -16\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(t) \leq 49$$

La hauteur maximale à laquelle s'élèvera la fusée est 49 mètres et ce maximum sera atteint à l'instant $t = \frac{5}{4} = 1,25$ seconde.

3.

Réolvons $f(t) = -16t^2 + 40t + 24 > 40$

$$\Leftrightarrow -16t^2 + 40t - 16 > 0$$

$$\Delta = 40^2 - 4 \times (-16) \times (-16) = 576 > 0$$

Les deux solutions sont donc :

$$t_1 = \frac{-40 - \sqrt{576}}{2 \times (-16)} = 2$$

et $t_2 = \frac{-40 + \sqrt{576}}{2 \times (-16)} = 0,5$

t	0	0,5	2	3
$f(t)$	-	0	+	0

car $a = -16 < 0$

		La fusée restera donc au-dessus du plafond de 40 m entre 0,5 et 2 secondes, soit pendant 1,5 seconde.
--	--	---



Correction de l'exercice 4.

- 1. Soit la suite de terme général $u_n = 3 \times 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a) Déterminer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- 2. Soit la suite de terme général $v_n = n + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a) Déterminer $v_{n+1} - v_n$.
- b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
- 3. Soit la suite de terme général $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a) Déterminer $w_{n+1} - w_n$.
- b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n) .



Exercice 4.	1a	Soit $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 3 \times 2^{-n}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{-(n+1)}}{3 \times 2^{-n}} = \frac{3 \times 2^{-n-1}}{3 \times 2^{-n}} = \frac{2^{-n} \times 2^{-1}}{2^{-n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$
	1b	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,5 < 1 \text{ et } u_n > 0$ On en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante.
	2a	Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_n = n + 3^n$ $v_{n+1} - v_n = n + 1 + 3^{n+1} - (n + 3^n)$ $v_{n+1} - v_n = n + 1 + 3^{n+1} - n - 3^n$ $v_{n+1} - v_n = 1 + 3^{n+1} - 3^n$ $v_{n+1} - v_n = 1 + 3^n(3 - 1)$ $v_{n+1} - v_n = 1 + 3^n \times 2$
	2b	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3^n(3 - 1) > 0$ donc $v_{n+1} > v_n$ On en déduit donc que la suite (v_n) est croissante.
	3a	Soit $n \in \mathbb{N}$ $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $w_{n+1} - w_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} \times \sqrt{n+2}}$

	$w_{n+1} - w_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1}}$ $w_{n+1} - w_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$ $w_{n+1} - w_n = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n+2}^2}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$ $w_{n+1} - w_n = \frac{n+1 - (n+2)}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$ $w_{n+1} - w_n = \frac{n+1 - n - 2}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$ $w_{n+1} - w_n = \frac{-1}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$
3b	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+2} > 0$, $\sqrt{n+1} > 0$ et $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} > 0$ puisque $-1 < 0$ donc $w_{n+1} - w_n < 0$ On en déduit donc que la suite (w_n) est décroissante.



Correction de l'exercice 5.

- 1. On considère la suite (u_n) définie par :
- $$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = u_n - 2(n+3) + 2$$
- a) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.
 b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer votre réponse.
- 2. On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{n \times v_n}{n+1}$
- c) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.
 d) Déterminer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .



Exercice 5.	1a	$u_0 = 2$ pour $n = 0$, $u_1 = u_0 - 2(0+3) + 2 = 2 - 6 + 2 = -2$ pour $n = 1$, $u_2 = u_1 - 2(1+3) + 2 = -2 - 8 + 2 = -8$ pour $n = 2$, $u_3 = u_2 - 2(2+3) + 2 = -8 - 10 + 2 = -16$
	1b	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2(n+3) + 2$ $u_{n+1} - u_n = -2n - 6 + 2 = -2n - 4$ $n \geq 0$ donc $-2n - 4 < 0$ On en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante.
	2a	$v_1 = 2$

		pour $n = 1$, $v_2 = \frac{1 \times v_1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$ pour $n = 2$, $v_3 = \frac{2 \times v_2}{2 + 1} = \frac{2 \times 1}{3} = \frac{2}{3}$ pour $n = 3$, $v_4 = \frac{3 \times v_3}{3 + 1} = \frac{3 \times \frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
	2b	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n \times v_n}{n+1}}{v_n} = \frac{n \times v_n}{n+1} \times \frac{1}{v_n} = \frac{n}{n+1}$
	2c	$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \leq n+1$ donc $\frac{n}{n+1} \leq 1$ On en déduit donc que la suite (v_n) est décroissante.

