

Exercice 1.

Un étudiant loue un studio à partir du 1^{er} janvier 2023. Il a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le locataire s'engage à occuper le studio pendant 8 années complètes.

► **1. Contrat n°1 :** On note $u_0 = 4\,830$ € le loyer payé lors de la 1^{re} année, le locataire accepte ensuite une augmentation, chaque année, de 3% du loyer de l'année précédente.

- Calculer u_1 le loyer payé lors de la 2^e année.
- Quelle est la nature de (u_n) ? On précisera sa raison.
- Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire u_7 le loyer payé lors de la 8^e année.
- Calculer S_7 la somme payée par le locataire à l'issue des 8 années de ce contrat.

► **2. Contrat n°2 :** On note $v_0 = 5\,940$ € le loyer payé lors de la 1^{re} année, le locataire accepte ensuite une diminution, chaque année, de 3% du loyer de l'année précédente.

- Calculer v_1 le loyer payé lors de la 2^e année.
- Quelle est la nature de (v_n) ? On précisera sa raison.
- Exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire v_7 le loyer payé lors de la 8^e année.
- Calculer T_7 la somme payée par le locataire à l'issue des 8 années de ce contrat.

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 0$

- La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez votre réponse.
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .
- Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 8 - \frac{16}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$

- La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez votre réponse.
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .
- Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 4.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$

► 1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez votre réponse.

► 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est **géométrique**.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

► 3. Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 5.

Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - 2n + 1$ et $u_0 = -1$

► 1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez votre réponse.

► 2. On définit la suite (v_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + n^2 + n + 1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique, on précisera ses éléments caractéristiques.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

Exercice 6.

En traversant une plaque d'isolation phonique, un son perd 10% de son intensité.

► 1. Soit I_0 l'intensité d'un son à l'entrée dans une plaque d'isolation phonique et I_1 son intensité à la sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .

► 2. On superpose n plaques d'isolation phonique identiques avec $n \geq 1$. On note I_n l'intensité du son à la sortie de la n -ième plaque.

a) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} . En déduire la nature de la suite (I_n) .

b) Exprimer alors I_n en fonction de n et de I_0 .

c) Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite (I_n) .

► 3. Déterminer le nombre minimum de plaques nécessaires pour que l'intensité du son soit divisée par quatre.

Exercice 7.

Le "7e continent de plastique" est décrit comme une immense plaque de déchets évoluant dans le nord de l'océan Pacifique, de la taille d'un tiers des Etats-Unis ou de six fois la France. En 1980, on estimait ces déchets plastiques dans l'océan à 3 millions de tonnes, on note $u_0 = 3$. On estime que depuis, chaque année, 150 millions de tonnes de plastique sont produites chaque année dans le monde, dont 5 % finissent dans cet océan et s'ajoute au plastique déjà présent.

► 1. Combien de tonnes représentent 5 % de 150 millions de tonnes ?

► 2. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de déchet plastique dans l'océan, en millions de tonnes, pour l'année $1980 + n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

► 3. Exprimer u_n en fonction de n .

► 4. « Selon une étude récente, la quantité de plastique dans l'océan a été multipliée par cent en quarante ans ! ». Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Exercice 1.

Un étudiant loue un studio à partir du 1^{er} janvier 2023. Il a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le locataire s'engage à occuper le studio pendant 8 années complètes.

► **1. Contrat n°1 :** On note $u_0 = 4\,830$ € le loyer payé lors de la 1^{re} année, le locataire accepte ensuite une augmentation, chaque année, de 3% du loyer de l'année précédente.

- Calculer u_1 le loyer payé lors de la 2^e année.
- Quelle est la nature de (u_n) ? On précisera sa raison.
- Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire u_7 le loyer payé lors de la 8^e année.
- Calculer S_7 la somme payée par le locataire à l'issue des 8 années de ce contrat.

► **2. Contrat n°2 :** On note $v_0 = 5\,940$ € le loyer payé lors de la 1^{re} année, le locataire accepte ensuite une diminution, chaque année, de 3% du loyer de l'année précédente.

- Calculer v_1 le loyer payé lors de la 2^e année.
- Quelle est la nature de (v_n) ? On précisera sa raison.
- Exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire v_7 le loyer payé lors de la 8^e année.
- Calculer T_7 la somme payée par le locataire à l'issue des 8 années de ce contrat.

Exercice 1.	1.	Augmenter de 3% revient à multiplier par 1,03. $u_1 = 4\,830 \times 1,03 = 4\,974,90$ €
		$u_{n+1} = 1,03 \times u_n$ pour tout n La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,03.
		$u_n = 4\,830 \times 1,03^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
		$u_7 = 4\,830 \times 1,03^7 \approx 5\,940,29$ €
		$S_7 = u_0 + u_1 + \dots + u_7 = 4\,830 \times \frac{1 - 1,03^8}{1 - 1,03} \approx 42\,949,98$ €
	2.	Diminuer de 3% revient à multiplier par 0,97. $v_1 = 5\,940 \times 0,97 = 5\,761,80$ €
		$v_{n+1} = 0,97 \times v_n$ pour tout n La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,97.
		$v_n = 5\,940 \times 0,97^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
		$v_7 = 5\,940 \times 0,97^7 \approx 4\,799,42$ €

		$T_7 = v_0 + v_1 + \dots + v_7 = 5\,940 \times \frac{1 - 0,97^8}{1 - 0,97} \approx 42\,818,81 \text{ €}$
--	--	--

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 0$

► 1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez votre réponse.

► 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

► 3. Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 3.	1.	$u_0 = 0$ $u_1 = 1 + \frac{1}{2} \times 0 = 1$ $u_2 = 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1,5$ $u_1 - u_0 = 1$ $u_2 - u_1 = 0,5 \neq 1$ La suite n'est donc pas arithmétique $\frac{u_0}{u_1} = \frac{0}{1} = 0$ $\frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{1,5} \neq 0$ La suite n'est donc pas géométrique
	2a	Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ (Première substitution) $v_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}u_n\right) - 2$ (Seconde substitution) $v_{n+1} = -1 + \frac{1}{2}u_n$ $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$ La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = u_0 - 2 = -2$
	2b	On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \underbrace{v_0 \times q^n = v_1 \times q^{n-1}}_{\text{formules des suites géométriques}} = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ or $v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2 = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$
	3	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 8 - \frac{16}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$

► 1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez votre réponse.

► 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

► 3. Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 3.	1.	$u_0 = 1$ $u_1 = 8 - \frac{16}{u_0} = 8 - \frac{16}{1} = 8 - 16 = -8$ $u_2 = 8 - \frac{16}{-8} = 8 + 2 = 10$ $u_1 - u_0 = -8 - 1 = -9$ $u_2 - u_1 = 10 - (-8) = 18 \neq -9$ La suite n'est donc pas arithmétique $\frac{u_1}{u_0} = \frac{-8}{1} = -8$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{-8} = -1,25 \neq -8$ La suite n'est donc pas géométrique
	2a	Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 4} - \frac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{8 - \frac{16}{u_n} - 4} - \frac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4 - \frac{16}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{4u_n - 16}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{4u_n - 16}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = 1 \times \frac{u_n}{4u_n - 16} - \frac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{4u_n - 16} - \frac{1}{4 \times (u_n - 4)}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{4u_n - 16} - \frac{1}{4u_n - 16}$

		$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 4}{4u_n - 16}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 4}{4 \times (u_n - 4)}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}$ Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = \frac{1}{u_0 - 4} = \frac{1}{1 - 4} = -\frac{1}{3}$
	2b	La suite (v_n) étant arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = -\frac{1}{3}$ On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times q = -\frac{1}{3} + n \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} + \frac{n}{4}$ Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = u_n - 4$ $\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} + 4 = u_n$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{v_n} + 4 = \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{n}{4}} + 4$
	3	$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3} + \frac{n}{4} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{n}{4}} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

Exercice 4.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$

► 1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez votre réponse.

► 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

► 3. Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 4	1.	$u_0 = \frac{1}{2}$ $u_1 = \frac{\frac{3}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + 1} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
------------	----	---

		$u_2 = \frac{3 \times \frac{3}{4}}{1 + 2 \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$ $u_1 - u_0 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0,25$ $u_2 - u_1 = \frac{9}{10} - \frac{3}{4} = 0,15 \neq 0,25$ La suite n'est donc pas arithmétique $\frac{u_1}{u_0} = \frac{3/4}{1/2} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{9/10}{3/4} = \frac{9}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{6}{5} \neq \frac{3}{2}$ La suite n'est donc pas géométrique
	2a	Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$ $v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{1 - \frac{3u_n}{1 + 2u_n}}$ $v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{1 + 2u_n - 3u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{3u_n}{1 - u_n}$ $v_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} \times \frac{1 + 2u_n}{1 - u_n} = \frac{3u_n}{1 - u_n}$ $v_{n+1} = 3 \times \frac{u_n}{1 - u_n} = 3v_n$ Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et $v_0 = \frac{u_0}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$
	2b	On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$ Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$ $\Leftrightarrow v_n(1 - u_n) = u_n$ $\Leftrightarrow v_n - v_n u_n = u_n$ $\Leftrightarrow v_n = v_n u_n + u_n = (v_n + 1)u_n$ $\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

		$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1} = \frac{3^n + 1 - 1}{3^n + 1} = 1 - \frac{1}{3^n + 1}$
3		$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 5.

Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - 2n + 1$ et $u_0 = -1$

► 1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifiez votre réponse.

► 2. On définit la suite (v_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + n^2 + n + 1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique, on précisera ses éléments caractéristiques.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

Exercice 5.	1.	$u_0 = -1$ $u_1 = -1 - 2 \times 0 + 1 = 0$ $u_2 = 0 - 2 \times 1 + 1 = -1$ $u_1 - u_0 = 1$ $u_2 - u_1 = -1 \neq 1$ La suite n'est donc pas arithmétique La suite n'est donc pas géométrique car $u_1 = 0$
	2a	Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (u_n + n^2 + n + 1)$ $v_{n+1} - v_n = u_n - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 + n + 2 - u_n - n^2 - n - 1$ $v_{n+1} - v_n = 3$ Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 3 et $v_0 = -1 + 0^2 + 0 + 1 = 0$.
	2b	On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 0 + 3n = 3n$ $\text{Or, } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + n^2 + n + 1 = 3n$ $u_n = 3n - n^2 - n - 1 = 2n - n^2 - 1$

Exercice 6.

En traversant une plaque d'isolation phonique, un son perd 10% de son intensité.

► 1. Soit I_0 l'intensité d'un son à l'entrée dans une plaque d'isolation phonique et I_1 son intensité à la sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .

► 2. On superpose n plaques d'isolation phonique identiques avec $n \geq 1$. On note I_n l'intensité du son à la sortie de la n -ième plaque.

a) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} . En déduire la nature de la suite (I_n) .

b) Exprimer alors I_n en fonction de n et de I_0 .

c) Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite (I_n) .

► 3. Déterminer le nombre minimum de plaques nécessaires pour que l'intensité du son soit divisée par quatre.

Exercice 6.	1.	$I_1 = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times I_0 = 0,9 I_0$
	2.	$I_n = 0,9 I_{n-1}$, la suite (I_n) est donc géométrique
		$I_n = I_0 \times 0,9^n$
		(I_n) a pour raison $0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Exercice 7.

Le "7e continent de plastique" est décrit comme une immense plaque de déchets évoluant dans le nord de l'océan Pacifique, de la taille d'un tiers des Etats-Unis ou de six fois la France. En 1980, on estimait ces déchets plastiques dans l'océan à 3 millions de tonnes, on note $u_0 = 3$. On estime que depuis, chaque année, 150 millions de tonnes de plastique sont produites chaque année dans le monde, dont 5 % finissent dans cet océan et s'ajoute au plastique déjà présent.

- 1. Combien de tonnes représentent 5 % de 150 millions de tonnes ?
- 2. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de déchet plastique dans l'océan, en millions de tonnes, pour l'année $1980 + n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- 3. Exprimer u_n en fonction de n .
- 4. « Selon une étude récente, la quantité de plastique dans l'océan a été multipliée par cent en quarante ans ! ». Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Exercice 7.	1.	5% de 150 millions de tonnes de plastique représentent $\frac{5}{100} \times 150 = 7,5$ millions de tonnes.
	2.	La suite (u_n) est arithmétique de raison 7,5.
	3.	Pour tout entier n , $u_n = 3 + 7,5 \times n = 3 + 7,5n$
	4.	L'affirmation compare la quantité de plastique entre 1980 et 2020. 2020 correspond à $1980 + 40$ soit $u_{40} = 3 + 7,5 \times 40 = 303$ millions de tonnes de plastique contre $u_0 = 3$ millions de tonnes en 1980. Effectivement, la quantité de plastique dans l'océan a été multipliée par 100 en 40 ans.