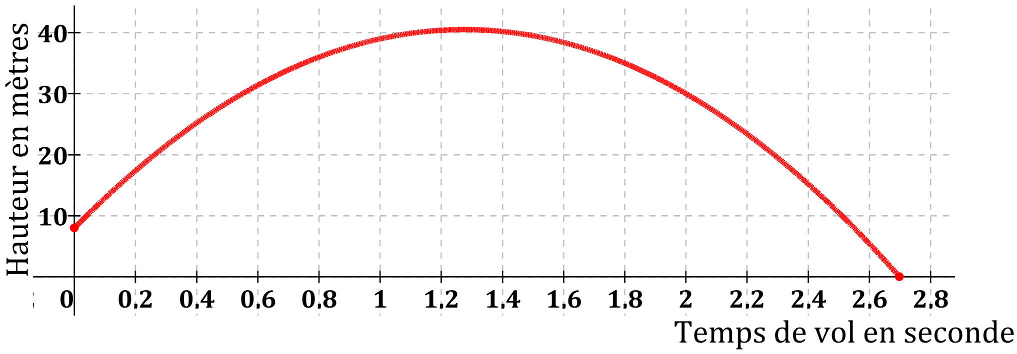
Exercice 1. (10 points)

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusée, notés A et B.

Partie A

La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol, en seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



Répondre aux deux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

▶1. Quelle hauteur atteindra la fusée après 2 secondes de vol ?

▶2. Pour des raisons de sécurité, la fusée doit exploser à une altitude supérieure à 30 mètres. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel l'artificier peut faire exploser sa fusée.

Partie B

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 2.9]$ par :

$$f(x) = -20x^2 + 56x + 8.$$

▶1. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 2.9]$.

▶2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 2.9]$.

▶3. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2.9]$.

▶4. Pour des raisons d'esthétique, l'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à leur hauteur maximale. Quel temps de vol avant explosion doit-il alors programmer et, dans ce cas, à quelle hauteur les fusées vont-elles exploser ?

Exercice 2. (10 points)

La glycémie est la concentration massique exprimée en gramme par litre (g.L^{-1}) de sucre dans le sang. Le diabète se caractérise par une hyperglycémie chronique, c'est-à-dire un excès de sucre dans le sang et donc une glycémie trop élevée.

Une glycémie est normale lorsqu'elle est comprise entre 0,7 g.L^{-1} et 1,1 g.L^{-1} à jeun et lorsqu'elle est inférieure à 1,4 g.L^{-1}, une heure et trente minutes après un repas. Lorsque l'on suspecte un diabète, on pratique un test de tolérance au glucose. Lorsqu'il est à jeun, le patient ingère 75 g de glucose au temps $t = 0$ (t est exprimé en heure).

Pour tout réel t de l'intervalle $[0; 3]$, la glycémie du patient, exprimée en g.L^{-1}, t heures après l'ingestion, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(t) = 0{,}3t^3 - 1{,}8t^2 + 2{,}7t + 0{,}8$$

▶1. Que valait la glycémie du patient à jeun ?

▶2. a) Calculer $f'(t)$ pour tout nombre t de l'intervalle $[0; 3]$.

b) Vérifier que pour tout nombre t de l'intervalle $[0; 3]$, on a $f'(t) = 0{,}9(t-1)(t-3)$

c) Dresser alors le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

d) Au bout de combien de temps la glycémie du patient est-elle maximale et combien vaut-elle ?

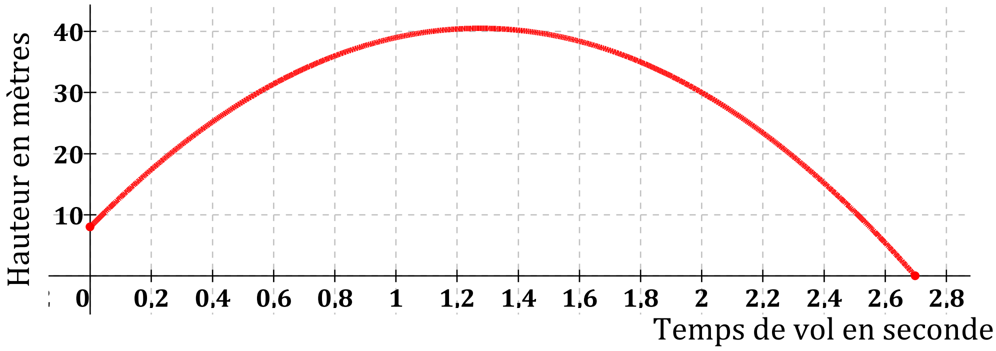
▶3. Peut-on suspecter un diabète chez le patient ? Expliquer votre réponse.

Exercice 1.

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusée, notés A et B.

Partie A

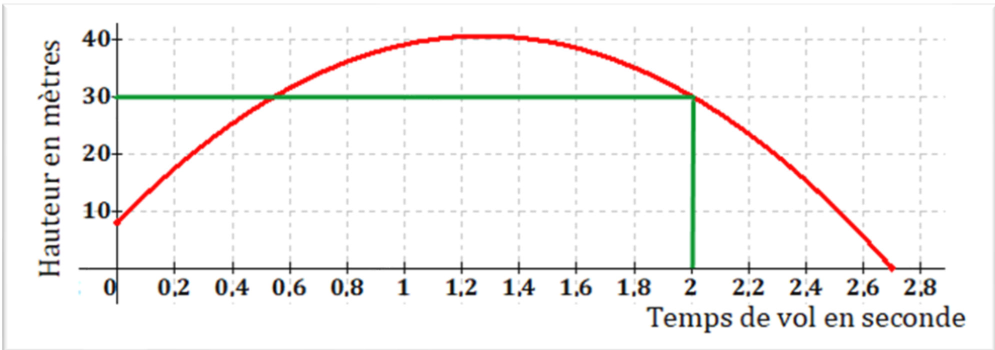
La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol, en seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.

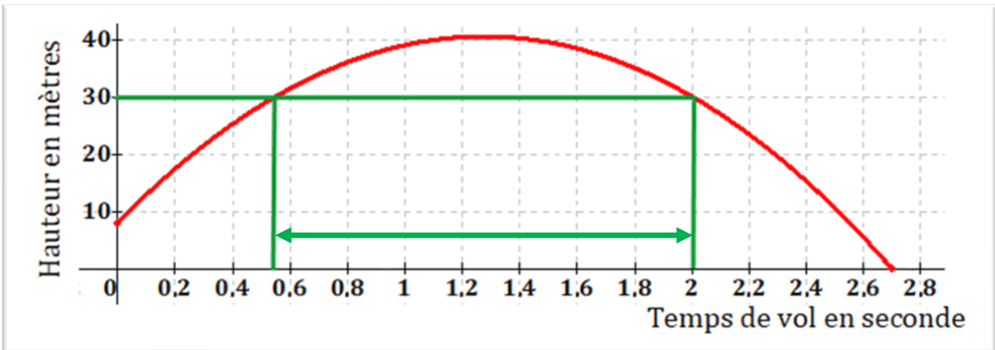


Répondre aux deux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

►1. Quelle hauteur atteindra la fusée après 2 secondes de vol ?

►2. Pour des raisons de sécurité, la fusée doit exploser à une altitude supérieure à 30 mètres. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel l'artificier peut faire exploser sa fusée.

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 1. Partie A.</td><td>1.</td><td>

Après 2 secondes de vol, la fusée atteindra 30 mètres de hauteur.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>

L'artificier peut faire exploser sa fusée entre 0,55 et 2 secondes, il dispose donc de 1,45 seconde.</td><td>2</td></tr>
</table>

Partie B

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 2.9]$ par :

$$f(x) = -20x^2 + 56x + 8.$$

▶1. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 2.9]$.
▶2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 2.9]$.
▶3. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2.9]$.
▶4. Pour des raisons d'esthétique, l'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à leur hauteur maximale. Quel temps de vol avant explosion doit-il alors programmer et, dans ce cas, à quelle hauteur les fusées vont-elles exploser ?

<table>
<tr><td rowspan="4">Exercice 1. Partie B.</td><td>1.</td><td>$f(x) = -20\mathbf{x^2} + 56\mathbf{x} + 8$
$f'(x) = -20 \times \mathbf{2x} + 56$
$f'(x) = -40x + 56$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$f'(x) = 0$
$-40x + \mathbf{56} = 0$
$-40x = 0 - \mathbf{56}$
$\mathbf{-40}x = -56$
$x = \dfrac{-56}{\mathbf{-40}}$
$x = 1{,}4$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>3.</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>$1{,}4$</td><td></td><td>$2{,}9$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↗</td><td>$47{,}2$</td><td>↘</td><td></td></tr></table>$f(\mathbf{1,4}) = -20 \times \mathbf{1,4}^2 + 56 \times \mathbf{1,4} + 8$
$f(1{,}4) = 47{,}2$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Les fusées seront à leur hauteur maximale au bout de 1,4 seconde et elles atteindront 47,2 mètres de hauteur.</td><td>2</td></tr>
</table>

Exercice 2. (10 points)

La glycémie est la concentration massique exprimée en gramme par litre (g.L^{-1}) de sucre dans le sang. Le diabète se caractérise par une hyperglycémie chronique, c'est-à-dire un excès de sucre dans le sang et donc une glycémie trop élevée.

Une glycémie est normale lorsqu'elle est comprise entre 0,7 g.L^{-1} et 1,1 g.L^{-1} à jeun et lorsqu'elle est inférieure à 1,4 g.L^{-1}, une heure et trente minutes après un repas. Lorsque l'on suspecte un diabète, on pratique un test de tolérance au glucose. Lorsqu'il est à jeun, le patient ingère 75 g de glucose au temps $t = 0$ (t est exprimé en heure).

Pour tout réel t de l'intervalle $[0; 3]$, la glycémie du patient, exprimée en g.L^{-1}, t heures après l'ingestion, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(t) = 0{,}3t^3 - 1{,}8t^2 + 2{,}7t + 0{,}8$$

▶1. Que valait la glycémie du patient à jeun ?
▶2. a) Calculer $f'(t)$ pour tout nombre t de l'intervalle $[0; 3]$.
b) Vérifier que pour tout nombre t de l'intervalle $[0; 3]$, on a $f'(t) = 0{,}9(t-1)(t-3)$
c) Dresser alors le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.
d) Au bout de combien de temps la glycémie du patient est-elle maximale et combien vaut-elle ?
▶3. Peut-on suspecter un diabète chez le patient ? Expliquer votre réponse.

<table>
<tr>
<td rowspan="7">Exercice 2.</td>
<td>1.</td>
<td>Le patient est à jeun pour $t = 0$,
$$f(\mathbf{0}) = 0{,}3 \times \mathbf{0}^3 - 1{,}8 \times \mathbf{0}^2 + 2{,}7 \times \mathbf{0} + 0{,}8 = 0{,}8$$
La glycémie du patient à jeun vaut 0,8 g/L.</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>2a.</td>
<td>$$f(t) = 0{,}3\boldsymbol{t^3} - 1{,}8\boldsymbol{t^2} + 2{,}7\boldsymbol{t} + 0{,}8$$
$$f'(t) = 0{,}3 \times \mathbf{3}\boldsymbol{t^2} - 1{,}8 \times \mathbf{2}\boldsymbol{t} + 2{,}7$$
$$f'(t) = 0{,}9\, t^2 - 3{,}6\, t + 2{,}7$$</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>2b.</td>
<td>$$\begin{aligned} 0{,}9(t-1)(t-3) &= 0{,}9(t^2 - 3t - t + 3) \\ &= 0{,}9(t^2 - 4t + 3) \\ &= 0{,}9 \times t^2 - 0{,}9 \times 4t + 0{,}9 \times 3 \\ &= 0{,}9\, t^2 - 3{,}6\, t + 2{,}7 \end{aligned}$$
donc $0{,}9(t-1)(t-3) = f'(t)$</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>2c.</td>
<td><table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0,9</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr>
<tr><td>$t-1$</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$t-3$</td><td>−</td><td></td><td>−</td></tr>
<tr><td>$f'(t)$</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td></tr>
<tr><td>$f(t)$</td><td>↗</td><td>2</td><td>↘</td></tr>
</table>
$$f(\mathbf{1}) = 0{,}3 \times \mathbf{1}^3 - 1{,}8 \times \mathbf{1}^2 + 2{,}7 \times \mathbf{1} + 0{,}8$$
$$f(1) = 0{,}3 - 1{,}8 + 2{,}7 + 0{,}8 = 2$$</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>2d.</td>
<td>La glycémie du patient est maximale au bout d’une heure et elle vaut 2 g/L.</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td>La glycémie à jeun est normale.
Au bout d’une heure et demi, $t = 1{,}5$ la glycémie vaut alors :
$$f(\mathbf{1{,}5}) = 0{,}3 \times \mathbf{1{,}5}^3 - 1{,}8 \times \mathbf{1{,}5}^2 + 2{,}7 \times \mathbf{1{,}5} + 0{,}8$$
$$f(\mathbf{1{,}5}) \approx 1{,}8 \text{ g/L.}$$
Au bout d’une heure et demi, la glycémie n’est pas normale. On peut donc suspecter un diabète.</td>
<td>2</td>
</tr>
</table>