- Fiche n°17 1re STMG
Qu'est ce qu'une variable aléatoire ?

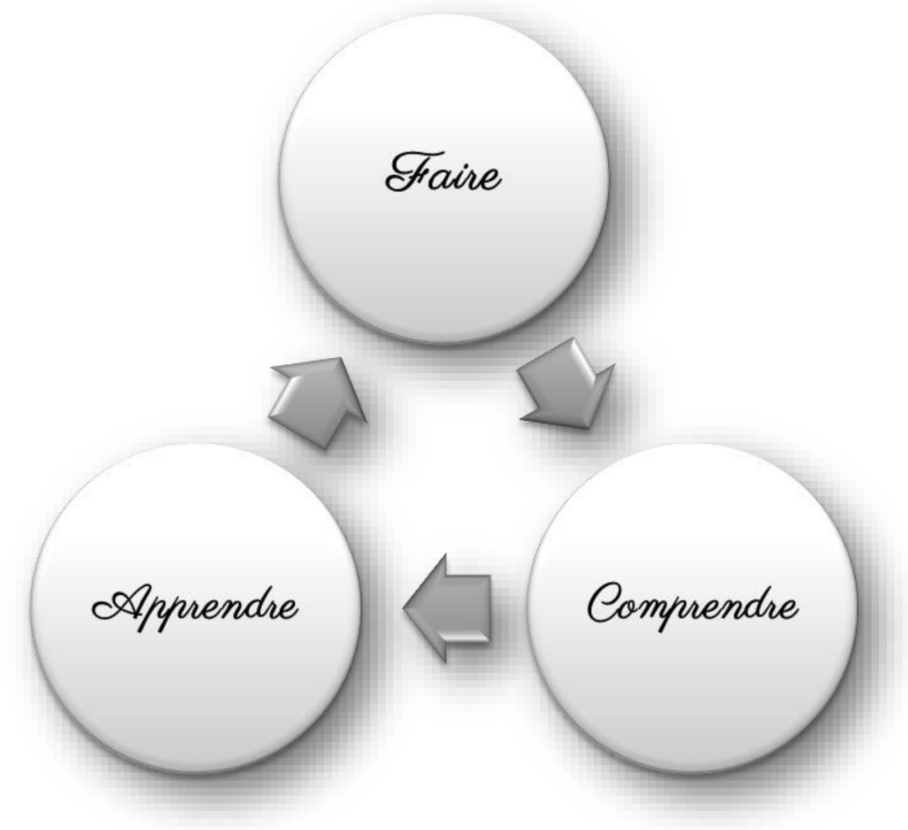


Table des matières

Qu'est ce qu'une variable aléatoire ?

Enoncé des exercices

Exercice 1.

Julie propose un jeu à son frère Adam. Elle a mis 3 jetons dans un sac : un bleu, un vert et un rouge. Adam doit tirer au hasard deux fois de suite un jeton du sac en remettant dans le sac le premier jeton tiré avant d'effectuer le second tirage. Si les deux jetons tirés sont verts, Adam gagne 30 points. Sinon, il perd 3 points.

▶1. Quelle est la probabilité de tirer le jeton vert au 1er tirage ?

▶2. Représenter par un arbre de probabilité l'expérience aléatoire correspondant au tirage de ces deux jetons.

▶3. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par Adam lorsqu'il joue une fois à ce jeu, en comptant négativement les points lorsqu'il perd. Donner la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X.

▶4. Julie modifie les règles afin de jouer à un deuxième jeu : si les deux jetons tirés sont identiques, Adam gagne 9 points ; sinon, il perd 3 points.
a) On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par Adam lorsqu'il joue une fois à ce deuxième jeu. Donner la loi de probabilité de X.
b) Adam affirme qu'il gagnera globalement plus de points en jouant souvent au premier jeu plutôt qu'au deuxième. Que pensez-vous de son affirmation ? Justifier.

Exercice 2.

On considère une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges, indiscernables au toucher. On réalise l'épreuve aléatoire suivante : un joueur pioche au hasard une boule, il note sa couleur, puis la remet dans l'urne.
On considère les évènements suivants :

R : « La boule piochée est rouge »
B : « La boule piochée est blanche »

▶1. On décide de répéter successivement 3 fois cette épreuve aléatoire.
a. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
b. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus 1 boule rouge.

▶2. À l'issue des 3 tirages, le joueur gagne 5 euros pour chaque boule rouge obtenue, et il perd 3 euros pour chaque boule blanche obtenue.
On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en euro.
a. Si on pioche deux boules rouges et une boule blanche, quelle est la valeur de X ?
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
En déduire $P(X \leq -1)$. Interpréter le résultat obtenu.
c. Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = -1{,}8$.
Interpréter ce résultat.

Qu'est ce qu'une variable aléatoire ?

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Julie propose un jeu à son frère Adam. Elle a mis 3 jetons dans un sac : un bleu, un vert et un rouge. Adam doit tirer au hasard deux fois de suite un jeton du sac en remettant dans le sac le premier jeton tiré avant d'effectuer le second tirage. Si les deux jetons tirés sont verts, Adam gagne 30 points. Sinon, il perd 3 points.

▶ 1. Quelle est la probabilité de tirer le jeton vert au 1er tirage ?

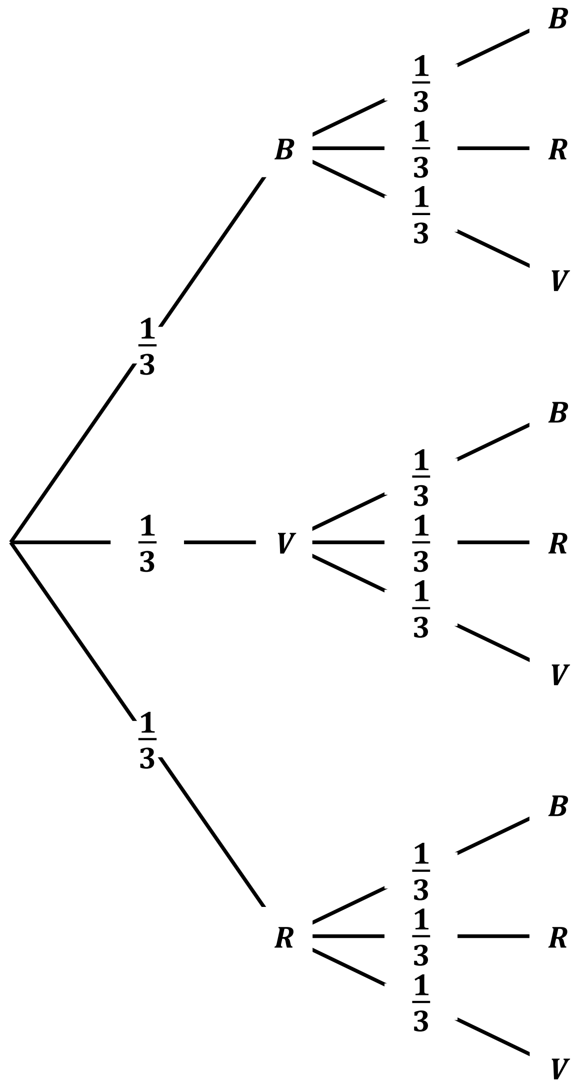
▶ 2. Représenter par un arbre de probabilité l'expérience aléatoire correspondant au tirage de ces deux jetons.

▶ 3. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par Adam lorsqu'il joue une fois à ce jeu, en comptant négativement les points lorsqu'il perd. Donner la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X.

▶ 4. Julie modifie les règles afin de jouer à un deuxième jeu : si les deux jetons tirés sont identiques, Adam gagne 9 points ; sinon, il perd 3 points.
a) On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par Adam lorsqu'il joue une fois à ce deuxième jeu. Donner la loi de probabilité de X.
b) Adam affirme qu'il gagnera globalement plus de points en jouant souvent au premier jeu plutôt qu'au deuxième. Que pensez-vous de son affirmation ? Justifier.

Exercice 1	**1.**	La probabilité de tirer le jeton vert au 1er tirage est $\frac{1}{3}$

2.



3.

Adam gagne 30 points lorsqu'il obtient 2 jetons verts ce qui va se produire avec une probabilité de

$$\frac{1}{9}$$

$X = k$	30	-3	Total
$P(X = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9} = 1$

$$E(X) = 30 \times \frac{1}{9} - 3 \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67 \text{ point}$$

4a.

Avec ce nouveau jeu, Adam gagne 9 points lorsqu'il obtient 2 jetons de la même couleur ce qui va se produire avec une probabilité de

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$Y = k$	9	-3	Total
$P(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3} = 1$

4b.

$$E(Y) = 9 \times \frac{1}{3} - 3 \times \frac{2}{3} = 1 \text{ point}$$

A long terme, le 2e jeu sera plus rentable.

Correction de l'exercice 2.

On considère une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges, indiscernables au toucher. On réalise l'épreuve aléatoire suivante : un joueur pioche au hasard une boule, il note sa couleur, puis la remet dans l'urne.

On considère les évènements suivants :

R : « La boule piochée est rouge »

B : « La boule piochée est blanche »

▶ 1. On décide de répéter successivement 3 fois cette épreuve aléatoire.

a. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

b. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus 1 boule rouge.

▶ 2. À l'issue des 3 tirages, le joueur gagne 5 euros pour chaque boule rouge obtenue, et il perd 3 euros pour chaque boule blanche obtenue.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en euro.

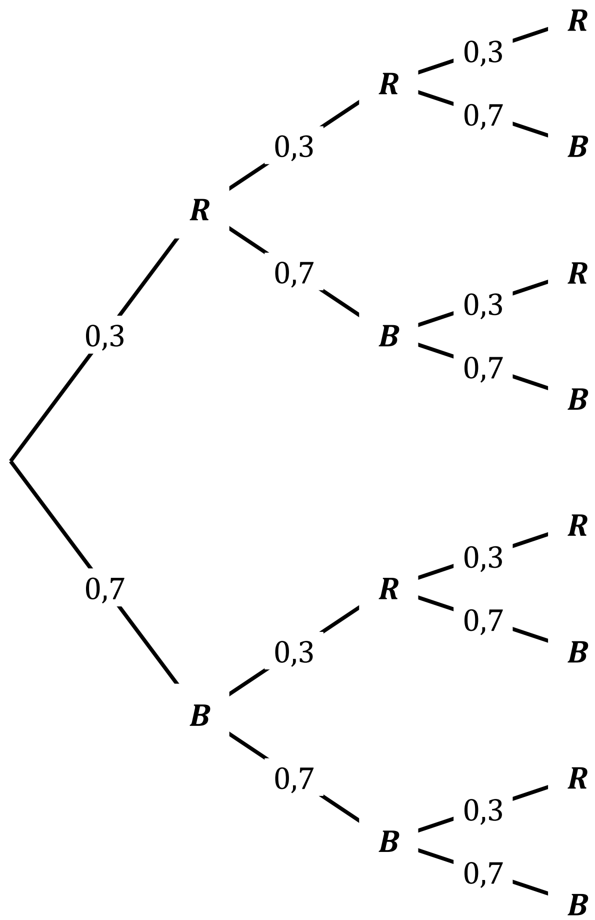
a. Si on pioche deux boules rouges et une boule blanche, quelle est la valeur de X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

En déduire $P(X \leq -1)$. Interpréter le résultat obtenu.

c. Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = -1{,}8$.

Interpréter ce résultat.

Exercice 1.	**1a.**	

1b.

« N'avoir aucune boule rouge » représente le chemin BBB qui a pour probabilité :

$$0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}7^3 = 0{,}343$$

« Avoir exactement une boule rouge » représente les chemins RBB ou BRB ou encore BBR qui ont pour probabilité :

$$0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}3 \times 0{,}7^2 = 0{,}147$$

En tout cela représente 4 chemins, la probabilité d'obtenir au plus 1 boule rouge vaut donc :

$$0{,}343 + 0{,}147 \times 3 = 0{,}784$$

2a.

Si on pioche deux boules rouges et une boule blanche alors
$X = 2 \times 5 - 3 = 7$ euros.

2b.

La loi de probabilité de X est :

$X = k$	15	7	-1	-9	Total
$P(X = k)$	$0{,}027$	$0{,}189$	$0{,}441$	$0{,}343$	1

$P(X \leq -1) = P(X = -9) + P(X = -1)$
$P(X \leq -1) = 0{,}343 + 0{,}441 = 0{,}784$
On a une probabilité de 78,4% de perdre de l'argent avec ce jeu.

2c.

$E(X) = 15 \times 0{,}027 + 7 \times 0{,}189 - 1 \times 0{,}441 - 9 \times 0{,}343$
$E(X) = -1{,}8.$
-1,8 euros c'est la somme que l'on peut espérer « *gagner* » en moyenne par partie si l'on joue un grand nombre de fois.