Equations différentielles du 1er ordre

1- Rappel de cours

Une équation différentielle est une équation, dont l'inconnue est une fonction, qui met en relation une fonction et ses dérivées.

Définition.

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, une équation de la forme $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = u(x)$ où a et b sont des fonctions dérivables sur I avec $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in$ I et où u est une fonction définie sur I.
L'inconnue est la fonction $y(x)$ et $y'(x)$ est sa dérivée.
L'équation $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ est appelée **équation homogène**.

Théorème. Résolution de l'équation homogène.

L'équation différentielle sur I, $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ admet pour solution générale l'ensemble des fonctions définies sur I par : $y(x) = ke^{-G(x)}$ où G désigne une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$ et où k est une constante.

Théorème.

Soit l'équation différentielle sur I : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = u(x)$.
La solution générale de cette équation est obtenue en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.

Théorème.

Une équation différentielle linéaire du premier ordre a une solution unique vérifiant une condition initiale donnée.

2- Exercices

Exercice 1.

Résoudre l'équation différentielle $(x+1)y'(x) + (x-1)y(x) = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 2.

Soit l'équation différentielle (E) $xy'(x) + y(x) = x$

1) Résoudre, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sous forme d'une fonction affine.
3) En déduire les solutions de (E).

Exercice 3.

Soit l'équation différentielle (E) $y'(x) - 4y(x) = 2e^{3x}$

1) Résoudre, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) avec la méthode de variation de la constante : chercher une solution particulière de la forme $k(x)e^{4x}$ où $k(x)$ est une fonction de x.
3) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 4.

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x}$$

Déterminer la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1 + \ln 2$.

3- Correction des exercices

Exercice 1. Correction

$y(x) = ke^{-G(x)}$ où $G(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ donc

$G(x) = x - 2\ln(x+1)$ donc

$y(x) = ke^{-x+2\ln(x+1)} = ke^{-x}e^{\ln(x+1)^2} = k(x+1)^2e^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Correction

1) On résout l'équation homogène associée (E_0) $xy'(x) + y(x) = 0$:

   $y(x) = ke^{-G(x)}$ où $G(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x}$ donc $G(x) = \ln x$

   donc les solutions de (E_0) sont les fonctions $y(x) = ke^{-\ln x} = ke^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{k}{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2) Cherchons une fonction affine solution de (E) : $y_p(x) = ax + b$ donc $y'(x) = a$ et $xa + ax + b = x \Leftrightarrow (2a-1)x + b = 0$, donc b = 0 et $2a - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $a = \frac{1}{2}$ et donc $y_p(x) = \frac{1}{2}x$.
3) La solution générale de (E) est $f(x) = y_p(x) + y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{k}{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Equations différentielles du 1er ordre

Exercice 3. Correction

1) On résout l'équation homogène associée (E_0) $y'(x) - 4y(x) = 0$, $y(x) = ke^{-G(x)}$ où $G(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)} = -4$ donc $G(x) = -4x$. Les solutions de (E_0) sont les fonctions $y(x) = ke^{4x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2) On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = k(x)e^{4x}$: $y'_p(x) = k'(x)e^{4x} + 4k(x)e^{4x} = \big(k'(x) + 4k(x)\big)e^{4x}$ donc puisque y_p est solution de (E) : $y'_p(x) - 4y'_p(x) = 2\mathrm{e}^{3x} = \big(k'(x) + 4k(x)\big)e^{4x} - 4k(x)e^{4x} = k'(x)e^{4x}$ donc $k'(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$ soit $k(x) = -2\mathrm{e}^{-x}$. On en déduit que $y_p(x) = -2\mathrm{e}^{-x} \times e^{4x} = -2e^{3x}$.
3) La solution générale de (E) est $f(x) = y_p(x) + y(x) = -2e^{3x} + ke^{4x}$ avec $k \in \mathbb{R}$, puisque $f(0) = 1$, $f(0) = -2 \times 1 + k \times 1 = -2 + k = 1$, on en déduit que $k = 3$. La solution est donc $f(x) = -2e^{3x} + 3e^{4x}$.

Exercice 4. Correction

L'équation différentielle homogène associée à (E) est (E_0) $y' + y = 0$, les solutions sont les fonctions $y(x) = ke^{-G(x)}$ où $G(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)} = 1$ donc $G(x) = x$. Les solutions de (E_0) sont $y_0(x) = ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante : $h(x) = k(x)e^{-x}$ est solution de (E)

or $h'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} = \big(k'(x) - k(x)\big)e^{-x}$ donc

$$\big(k'(x) - k(x)\big)e^{-x} + k(x)e^{-x} = k'(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x}$$

$k'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, une primitive est $k(x) = \ln(1 + e^x)$,
donc $h(x) = \ln(1 + e^x)e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

La solution générale de (E) est $f(x) = [k + \ln(1 + e^x)]e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

$f(0) = [k + \ln(1 + e^0)]e^0 = 1 + \ln 2 = k + \ln 2$ donc $k = 1$.

La solution vérifiant la condition initiale est donc $f(x) = [1 + \ln(1 + e^x)]e^{-x}$.