Equations différentielles du 2^{e} ordre

1- Rappel de cours

Définitions.

- On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, une équation de la forme $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=u(x)$ où a, b et c sont des constantes réelles données avec $a\neq 0$ et u une fonction dérivable sur I.
- L'équation $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$ est appelée **équation homogène** associée.
- On appelle **équation caractéristique** : $ar^2+br+c=0$ d'inconnue r.

Théorème. Résolution de l'équation homogène.

Soit l'équation différentielle (E_0) $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$, son équation caractéristique associée $ar^2+br+c=0$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta>0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 réelles et distinctes. La solution générale de (E_0) est alors
$$y(x)=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x},\quad \lambda\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R}$$
- Si $\Delta=0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double r réelle. La solution générale de (E_0) est alors
$$y(x)=(\lambda x+\mu)e^{rx},\quad \lambda\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R}$$
- Si $\Delta<0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$. La solution générale de (E_0) est alors
$$y(x)=(\lambda\cos\beta x+\mu\sin\beta x)e^{\alpha x},\quad \lambda\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R}$$

Théorème.

- La solution générale d'une équation avec second membre est obtenue en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.
- $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=u(x)$ a une solution unique vérifiant une condition initiale donnée du type $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_1)=y_1$.

2- Exercices

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''(x)-4y'(x)+3y(x)=0.$
2) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0.$
3) $y''(x)-2y'(x)+5y(x)=0.$

Exercice 2.

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E).
2) En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer une solution particulière de (E).
3) Déterminer la solution f de (E)qui vérifie $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 3.

Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 5\cos x$ qui vaut 0 en 0 et dont la dérivée vaut 0 en 0.

3- Correction des exercices

Exercice 1. Correction

1) L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. L'équation possède donc deux racines réelles et distinctes : $r_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{4+2}{2} = 3$.

   La solution générale de (E_0) est alors $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{3x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$.

2) L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 16 - 16 = 0$. L'équation possède donc une racine réelle double : $r = \frac{4}{2} = 2$.

   La solution générale de (E_0) est alors $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

3) L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 4 - 20 = -16$. L'équation possède donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{2+4\mathrm{i}}{2} = 1 + 2\mathrm{i}$ et $r_2 = 1 - 2\mathrm{i}$.

   La solution générale de (E_0) est alors $y(x) = (\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x)e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Correction

1) $(E_0)\quad y'' + 2y' + y = 0,$

Son équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0.$

$\Delta = 2^2 - 4 = 0, r = \frac{-2}{2} = -1$ est une solution double.

Les solutions de (E_0) sont $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

2) Cherchons une solution particulière de (E) de la forme :

$y(x) = \big(\lambda(x) \times x + \mu(x)\big)e^{-x}$

$y'(x) = \big(\lambda'(x)x + \lambda(x) + \mu'(x)\big)e^{-x} - \big(\lambda(x) \times x + \mu(x)\big)e^{-x}$

$y'(x) = \big(\lambda'(x)x + (1-x)\lambda(x) + \mu'(x) - \mu(x)\big)e^{-x}$

$y''(x) = \big(\lambda''(x)x + 2(1-x)\lambda'(x) + \mu''(x) - 2\mu'(x) - (2-x)\lambda(x) + \mu(x)\big)e^{-x}$

Donc $y'' + 2y' + y = 4e^{-x} = \big(\lambda''(x)x + 2\lambda'(x) + \mu''(x)\big)e^{-x}$

Soit $4 = \lambda''(x)x + 2\lambda'(x) + \mu''(x)$, en choisissant $\lambda(x) = 0$ pour tout x,

$\mu''(x) = 4$, on peut choisir $\mu'(x) = 4x$ et $\mu(x) = 2x^2$

La fonction $y_p(x) = 2x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E)

3) Les solutions de (E) sont les fonctions $f(x) = 2x^2e^{-x} + (\lambda x + \mu)e^{-x}$ avec

$\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

Or $f(0) = 4$ donc $f(0) = \mu = 4$

et $f'(0) = 1$, or $f'(x) = 4xe^{-x} - 2x^2e^{-x} + \lambda e^{-x} - (\lambda x + 4)e^{-x}$,

$f'(0) = \lambda - 4 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 5$ donc $f(x) = (2x^2 + 5x + 4)e^{-x}$

Exercice 3. Correction

L' équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0.$

$\Delta = -16, r = \frac{-2}{2} = -1$ est une solution double. L'équation possède donc deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$ et $r_2 = 1 + 2i$. Les solutions de (E_0) sont $y(x) = (\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)e^{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

Cherchons une solution particulière de la forme

$y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x, \quad y'(x) = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x$

$y''(x) = -A\omega^2 \cos \omega x - B\omega^2 \sin \omega x$

$y'' - 2y' + 5y = 5 \cos x$

$y'' - 2y' + 5y = (-A\omega^2 - 2B\omega + 5A) \cos \omega x + (-B\omega^2 + 2A\omega + 5B) \sin \omega x$

donc $\omega = 1, -A - 2B + 5A = 5$ et $-B + 2A + 5B = 0$

soit $A = 1$ et $B = \frac{-1}{2}$ et donc $y_p(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x$ est une solution particulière de (E).

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $f(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x + (\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

$f(0) = 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1,$

$f'(x) = -\sin x - \dfrac{1}{2} \cos x + (2\mu \cos 2x + 2 \sin 2x)e^x + (\mu \sin 2x - \cos 2x)e^x$

$f'(0) = -\frac{1}{2} + 2\mu - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4}$

donc $f(x) = \cos x - \dfrac{1}{2} \sin x + \left(\dfrac{3}{4} \sin 2x - \cos 2x\right) e^x$