Intégrales généralisées

1- Rappel de cours

Définition

Soit $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b[$.

Si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\, dt$ existe et est finie alors on dit que **l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ converge** et $\int_a^b f(t)\, dt = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\, dt$ Dans le cas contraire, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque

Si l'intégrale est généralisée aux deux bornes, il faut alors traiter une borne à la fois en coupant l'intégrale en deux avec la relation de Chasles.

2- Exercices

Exercice 1.

Etudier les convergences des intégrales suivantes :

$$\mathrm{A} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \qquad \mathrm{B} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad \mathrm{C} = \int_0^{+\infty} \cos t dt$$

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathrm{D} = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt \qquad \Gamma(\mathrm{n}) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathrm{E} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \qquad \mathrm{F} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \qquad \mathrm{G} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \qquad \mathrm{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$$

3- Correction des exercices

Exercice 1. Correction

$A=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=[\text{Arctan}t]_0^x=\text{Arctan}x,\ \lim_{x\to+\infty}\text{Arctan}x=\frac{\pi}{2}$ donc $A=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$

$B=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}$

$\int_x^1\frac{dt}{\sqrt{t}}=[2\sqrt{t}]_x^1=2-2\sqrt{x}$ et $\lim_{x\to 0}2-2\sqrt{x}=2$ donc $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}=2$

$\int_1^y\frac{dt}{\sqrt{t}}=[2\sqrt{t}]_1^y=2\sqrt{y}-2$ et $\lim_{y\to+\infty}2\sqrt{y}-2=+\infty$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge

Par conséquent $B=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge

$\int_0^x\cos t\,dt=[\sin t]_0^x=\sin x-\sin 0=\sin x$

La fonction $x\mapsto\sin x$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$ donc

$C=\int_0^{+\infty}\cos t\,dt$ est divergente

Exercice 2. Correction

$D=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt$

On utilise la formule $\sin 2a=2\sin a\cos a$

$D=\int_0^{\pi/2}\ln 2\,dt+\int_0^{\pi/2}\ln\sin\frac{t}{2}dt+\int_0^{\pi/2}\ln\cos\frac{t}{2}dt$

On effectue le changement de variable $u=\frac{t}{2},\quad t=2u,\quad dt=2du$

$D=\frac{\pi\ln 2}{2}+\int_0^{\pi/4}\ln\sin u\times 2du+\int_0^{\pi/4}\ln\cos u\times 2du$

On effectue le changement de variable $x=\frac{\pi}{2}-u, u=\frac{\pi}{2}-x, du=-dx$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

Si $u=0$ alors $x=\frac{\pi}{2}$ et si $u=\frac{\pi}{4}$ alors $x=\frac{\pi}{4}$

$$D = \frac{\pi \ln 2}{2} + 2\int_0^{\pi/4} \ln \sin u \, du + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \frac{\pi \ln 2}{2} + 2D$$

donc $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt = \frac{-\pi \ln 2}{2}$

$$\int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt$$

On intègre par parties, pour $n \geq 2$, $\begin{matrix} u'(t) = e^{-t} & u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t^{n-1} & v'(t) = (n-1)t^{n-2} \end{matrix}$

$$\int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt = [-t^{n-1}e^{-t}]_0^x + (n-1)\int_0^x t^{n-2}e^{-t} dt = -x^{n-1}e^{-x} + (n-1)\int_0^x t^{n-2}e^{-t} dt$$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t^{n-1}e^{-t} dt = (n-1) \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t^{n-2}e^{-t} dt$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2) \times \ldots \times 1 \times \Gamma(1)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \times \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t} dt = (n-1)! \times \lim_{x\to+\infty} [-e^{-t}]_0^x = (n-1)! \times \lim_{x\to+\infty} (-e^{-x} + 1)$$

donc $\Gamma(n) = (n-1)!$

Exercice 3. Correction

$$E = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt \quad \text{or} \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \text{donc}$$

$$E = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

$F = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$, on intègre par parties : $\begin{matrix} u'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} & u(t) = \frac{-1}{(1+t)} \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \end{matrix}$

$$F = \left[\frac{-\ln t}{(1+t)}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1+t-t}{t(1+t)} dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \left[\ln \frac{t}{1+t}\right]_1^{+\infty}$$

$$= -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

$G = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$, on intègre par parties : $\begin{matrix} u'(t) = \frac{1}{t^2} & u(t) = \frac{-1}{t} \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \end{matrix}$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt = \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \frac{-\ln x}{x} + \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = \frac{-\ln x}{x} + \frac{-1}{x} + 1 \quad \text{donc}$$

$$G = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln x}{x} + \frac{-1}{x} + 1 = 1$$

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt$$

$$\int_x^0 \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt = \int_x^0 \frac{2}{e^t + e^{-t}}dt$$

J'effectue le changement de variable suivant : $u = e^t$, $\quad t = \ln u$, $\quad dt = \frac{du}{u}$

Si $t = x$ alors $u = e^x$ et si $t = 0$ alors $u = 1$

$$\int_x^0 \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt = \int_{e^x}^1 \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \times \frac{du}{u} = \int_{e^x}^1 \frac{2}{u^2+1}du = 2[\arctan u]_{e^x}^1 = \frac{\pi}{2} - 2\arctan e^x$$

$$\text{donc} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^y \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt = [2\arctan u]_1^{e^y} = 2\arctan e^y - \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc} \quad H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt = \pi$$