Intégrales multiples

1- Rappel de cours

Théorème de Fubini

Si une fonction $f:(x,y) \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[a,b]\times[c,d]$,

Si pour tout $y \in [c,d]$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[a,b]$,

si pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[c,d]$,

si la fonction $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$ est intégrable sur $[a,b]$

et si la fonction $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$ est intégrable sur $[c,d]$

$$\text{alors } \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

Théorème de changement de variables

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$

$\phi : U \longrightarrow V$ une bijection telle que ϕ et ϕ^{-1} soient de classe c¹.

Soit f une fonction intégrable sur V et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a alors

$$\int_V f(u)\,du = \int_U (f\circ\phi)(x)\times\ |\mathrm{J}\phi(x)|\ dx \quad \text{où} \quad \mathrm{J}\phi(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}$$

2- Exercices

Exercice 1.

Calculer $\mathrm{A} = \iint_{\mathrm{D}_1} \ln(1+x+y)dx\mathrm{d}y$ où $\mathrm{D}_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

Exercice 2.

Calculer $\mathrm{B} = \iint_{\mathrm{D}_2} e^{x+y}dxdy$ où D_2 est le rectangle de sommets (–1 ; 0), (0 ; 1), (1 ; –2) et (2 ; –1).

Exercice 3.

Calculer $\mathrm{C} = \iint_{\mathrm{D}_3} x^2y^2dxdy$où $\mathrm{D}_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le xy\le 2 \text{ et } x\le y\le 4x\}$ en utilisant le changement de variable $u = xy \quad et \quad v = \frac{y}{x}$.

Exercice 4.

On considère dans $\mathbb{R}^3$ une sphère de rayon R.

Calculer le volume de cette sphère $\mathrm{D} = \iiint_{\mathrm{D}_4} dxdydz$ avec $\mathrm{D}_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 +$ $y2+z2\leq R2$ en utilisant un changement de variable en coordonnées sphériques.

Exercice 5.

Par changement de variables en coordonnées polaires du plan, calculer l'intégrale

$$\mathrm{E} = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\mathrm{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Exercice 6.

Calculer l'intégrale multiple suivante :

$\mathrm{G} = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-(u^2+v^2)} \cos\big(t(u^2+v^2)\big) dudv$ en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{w}\cos\theta\,, \quad v = \sqrt{w}\sin\theta$

3- Correction des exercices

Exercice 1. Correction

Effectuons le changement de variable suivant : $u = 1 + x + y$ et $v = y$ donc $x = u - 1 - v$ et $y = v$.

Le domaine avant le changement de variable est $\mathrm{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y \leq 1, x \geq$ $0, y\geq 0$

$y \geq 0 \iff v \geq 0 \qquad$ et $\qquad x \geq 0 \Leftrightarrow u - 1 - v \geq 0 \Leftrightarrow u \geq 1 + v$

$x + y \leq 1 \iff u - 1 \leq 1 \Leftrightarrow u \leq 2$

Le nouveau domaine est donc $\Delta_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, v + 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1\}$

Le jacobien est $\quad \mathrm{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\mathrm{A} = \iint_{\Delta_1} \ln(u) \times |1| dudv = \int_0^1 \left(\int_{v+1}^2 \ln(u) du \right) dv$$

On intègre par parties $\begin{array}{ll} f'(u)=1 & f(u)=u \\ g(u)=\ln(u) & g'(u)=\frac{1}{u} \end{array}$

$$A=\int_0^1\left([u\ln(u)]_{v+1}^2-\int_{v+1}^2 du\right)dv=\int_0^1(2\ln 2-(v+1)\ln(v+1)-1+v)dv$$

$$A=\left[(2\ln 2-1)v+\frac{v^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1(v+1)\ln(v+1)dv=2\ln 2-\frac{1}{2}-\int_0^1(v+1)\ln(v+1)dv$$

On effectue le changement de variable $t=v+1,\quad v=t-1,\quad dv=dt$

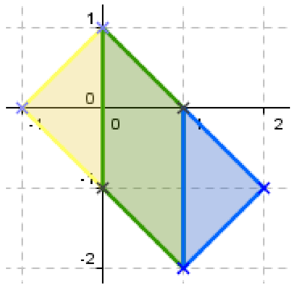
$A=2\ln 2-\frac{1}{2}-\int_1^2 t\ln(t)dt$, on intègre par parties $\begin{array}{ll} f'(v)=t & f(v)=\frac{t^2}{2} \\ g(v)=\ln(t) & g'(v)=\frac{1}{t} \end{array}$

$$\mathbf{A}=2\ln 2-\frac{1}{2}-\left[\frac{t^2\ln t}{2}\right]_1^2+\int_1^2\frac{t}{2}dt=2\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{4\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

Exercice 2.

Les équations des 4 côtés du rectangle sont $y=-x+1$,

$y=x-3,\quad y=-x-1\quad$ et $\quad y=x+1$



Découpons le domaine en trois morceaux $D_2=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3$

$\Delta_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, -1\leq x\leq 0, -x-1\ \leq y\leq x+1\}$

$\Delta_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\leq x\leq 1, -x-1\ \leq y\leq -x+1\}$

$\Delta_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 1\leq x\leq 2, x-3\ \leq y\leq -x+1\}$

$$B=\iint_{\Delta_1}e^{x+y}dxdy+\iint_{\Delta_2}e^{x+y}dxdy+\iint_{\Delta_3}e^{x+y}dxdy$$

$$B=\int_{-1}^0 e^x\left(\int_{-x-1}^{x+1}e^y dy\right)dx+\int_0^1 e^x\left(\int_{-x-1}^{-x+1}e^y dy\right)dx+\int_1^2 e^x\left(\int_{x-3}^{-x+1}e^y dy\right)dx$$

$$B=\int_{-1}^0 e^x(e^{x+1}-e^{-x-1})\,dx+\int_0^1 e^x(e^{-x+1}-e^{-x-1})\,dx+\int_1^2 e^x(e^{-x+1}-e^{x-3})\,dx$$

$$B=\int_{-1}^0(e^{2x+1}-e^{-1})\,dx+\int_0^1(e^1-e^{-1})\,dx+\int_1^2(e^1-e^{2x-3})\,dx$$

$$B=\left[\frac{1}{2}e^{2x+1}-\frac{x}{e}\right]_{-1}^0+\left[ex-\frac{x}{e}\right]_0^1+\left[ex-\frac{1}{2}e^{2x-3}\right]_1^2$$

$$\mathbf{B}=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-\frac{1}{e}+e-\frac{1}{e}+2e-\frac{e}{2}-e+\frac{1}{2e}=\mathbf{2e-\frac{2}{e}}$$

Exercice 3.

J'effectue le changement de variable $u = xy \quad et \quad v = \frac{y}{x}$

$u^2 = x^2y^2, \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}$ donc le jacobien est $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$

Etude du domaine :

$1 \leq xy \leq 2 \iff 1 \leq u \leq 2$

$x \leq y \leq 4x \iff 1 \leq v \leq 4$ car $x \neq 0$ car $1 \leq xy \leq 2$

Le nouveau domaine est $\Delta_3 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq u \leq 2 \text{ et } 1 \leq v \leq 4\}$

$$C = \iint_{D_3} x^2y^2dxdy = \int_1^2 \int_1^4 u^2 \times \frac{1}{2v} dudv = \int_1^2 u^2du \times \int_1^4 \frac{dv}{2v}$$

$$\mathbf{C} = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^2 \times \left[\frac{\ln v}{2}\right]_1^4 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{\ln 4}{2}\right) = \frac{7 \times 2\ln 2}{6} = \mathbf{\frac{7}{3}\ln 2}$$

Exercice 4.

J'effectue le changement de variable en coordonnées sphériques $x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$ et $z = r\cos\theta$ donc $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Le nouveau domaine est $\Delta_4 = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

Le jacobien est

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$J = \cos\theta\,(r^2\ \cos\theta\sin\theta) + r\ \sin\theta\,(r\sin^2\theta) = r^2\sin\theta$

$$D = \iiint_{\Delta_4} r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = \int_0^R r^2dr \times \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\mathbf{D} = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times [-\cos\theta]_0^\pi \times [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \mathbf{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

Exercice 5.

J'effectue le changement de variable : $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.

Le jacobien est $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\ \sin\theta \\ \sin\theta & r\ \cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

Le nouveau domaine est $\Delta = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

$$E = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^{+\infty} \times [\theta]_0^{2\pi}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \times 2\pi = \boldsymbol{\pi}$$

$$E = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\right)^2 = \pi$$

J'en déduis que $\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 6.

J'effectue le changement de variable :

$$u = \sqrt{w}\cos\theta\,,\quad v = \sqrt{w}\sin\theta\,,\quad u^2 + v^2 = w$$

$$\Delta = \left\{(w,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \le w, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Le jacobien est $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{w}} & -\sqrt{w}\ \sin\theta \\ \dfrac{\sin\theta}{2\sqrt{w}} & \sqrt{w}\ \cos\theta \end{vmatrix} = \dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{w}} \times \sqrt{w}\ \cos\theta + \sqrt{w}\ \sin\theta \times \dfrac{\sin\theta}{2\sqrt{w}} = \dfrac{1}{2}$

$$G = \int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-w}\cos tw \times \frac{1}{2}\,dw\,d\theta = \frac{1}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,.\int_0^{+\infty} e^{-w}\cos tw\,dw$$

$$G = \frac{\pi}{4} \times \int_0^{+\infty} e^{-w}\cos tw\,dw$$

J'intègre par parties : $\begin{array}{ll} u' = e^{-w} & u = -e^{-w} \\ v = \cos tw & v' = -t\sin tw \end{array}$

$$G = \frac{\pi}{4}[-\cos(tw)e^{-w}]_0^{+\infty} - \frac{\pi}{4}t\int_0^{+\infty} \sin tw\, e^{-w} dw$$

J'intègre par parties : $\begin{array}{ll} u' = e^{-w} & u = -e^{-w} \\ v = \sin tw & v' = t\cos tw \end{array}$

$$G = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}t\left[[-\sin tw\, e^{-w}]_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} \cos tw\, e^{-w} dw\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}t^2\int_0^{+\infty} \cos tw\, e^{-w} dw$$

or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-w}\cos tw\,dw = G \times \frac{4}{\pi}$

donc $G = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}t^2 \times G \times \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{\pi}{4} - t^2 \times G$

$$\mathbf{G} = \iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{-(u^2+v^2)}\cos\left(t(u^2+v^2)\right)dudv = \frac{\pi}{4(1+t^2)}$$