Polynômes du second degré

1- Rappel de cours

Théorème

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, il existe deux solutions complexes (qui peuvent être identiques) à l'équation $az^2 + bz + c = 0$:
On définit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une solution réelle double
$$z' = \frac{-b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Application

Le polynôme $az^2 + bz + c$ peut-être factorisé :

- si $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
- si $\Delta = 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z')^2$

2- Exercices

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

1) $x^2 - 4x + 1 = 0$
2) $z^2 + 6z\sqrt{3} + 36 = 0$
3) $(2t^2 - 6t + 5)(4t^2 + 4t + 1) = 0$

Exercice 2.

Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes suivants :

1) $f(x) = x^2 + 6x + 34$
2) $g(z) = z^3 - 64$ en remarquant que 4 est racine
3) $h(y) = (9y^2 - 12y + 4)(y^2 - 4y + 8)$

Polynômes du second degré

3- Correction des exercices

Exercice 1. Correction

1) $\Delta = (-4)^2 - 4 = 12$, les solutions sont donc $x_1 = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

2) $\Delta = \left(6\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 36 = -36$, les solutions sont donc $z_1 = \frac{6\sqrt{3} - i\sqrt{36}}{2} = 3\sqrt{3} - 3i$ et $z_2 = 3\sqrt{3} + 3i$.

3) $2t^2 - 6t + 5 = 0$, $\Delta_1 = 36 - 40 = -4$, les solutions sont $t_1 = \frac{6-2i}{4} = \frac{3-i}{2}$ et $t_2 = \frac{3+i}{2}$. $4t^2 + 4t + 1 = 0$, $\Delta_2 = 16 - 16 = 0$, la solution est $t_3 = \frac{-4}{2} = -2$.

Exercice 2. Correction

1) $\Delta = -100$, les racines sont donc $x_1 = \frac{-6-10i}{2} = -3 - 5i$ et $x_2 = -3 + 5i$ donc
$f(x) = (x + 3 + 5i)(x + 3 - 5i)$

2) $g(4) = 0$ donc $g(z) = (z-4)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c$
$g(z) = az^3 + (b - 4a)z^2 + (c - 4b)z - 4c = z^3 - 64$
Par identification : $a = 1$, $b - 4a = 0, c - 4b = 0$ et $-4c = -64$
Donc $a = 1$, $b = 4$ et $c = 16$, donc $g(z) = (z-4)(z^2 + 4z + 16)$
$\Delta = -48$, les racines sont donc $z_1 = \frac{-4 - i\sqrt{48}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$
et finalement $g(z) = (z-4)\left(z + 2 + 2i\sqrt{3}\right)\left(z + 2 - 2i\sqrt{3}\right)$

3) $\Delta_1 = 0$, la racine est $z' = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ et $\Delta_2 = -16$, les racines sont $y_1 = \frac{4-4i}{2} = 2 - 2i$ et
$y_2 = 2 + 2i$ donc $h(y) = 9\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 (y - 2 + 2i)(y - 2 - 2i)$