

1 Premier cône

On étudie le cône :

- de sommet $A(0; 0; 2)$
- de centre de base $O(0; 0; 0)$
- de point de base $B(0; 1; 0)$

On considère le point mobile $M(0; 0; z)$ où $0 \leq z \leq 2$.

Le rayon de ce cercle MN est, d'après le théorème de Thalès :

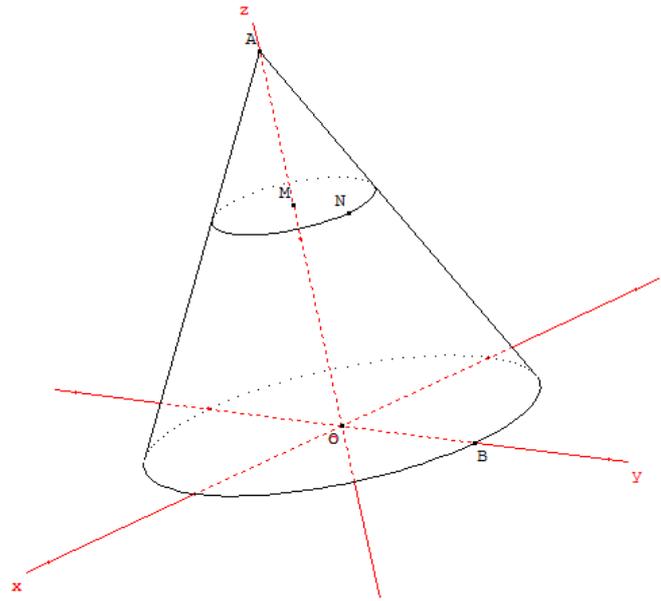
$$\frac{AM}{AO} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{OB}$$

$$\frac{2-z}{2} = \frac{MN}{1}$$

$$MN = 1 - 0,5z$$

L'équation du cercle de centre $M(0; 0; z)$ et de rayon MN est :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (1 - 0,5z)^2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$



2 Deuxième cône

On étudie le cône :

- de sommet $E(0; 1; 1)$
- de centre de base $F(0; -1; 1)$
- de point de base $G(1; -1; 1)$

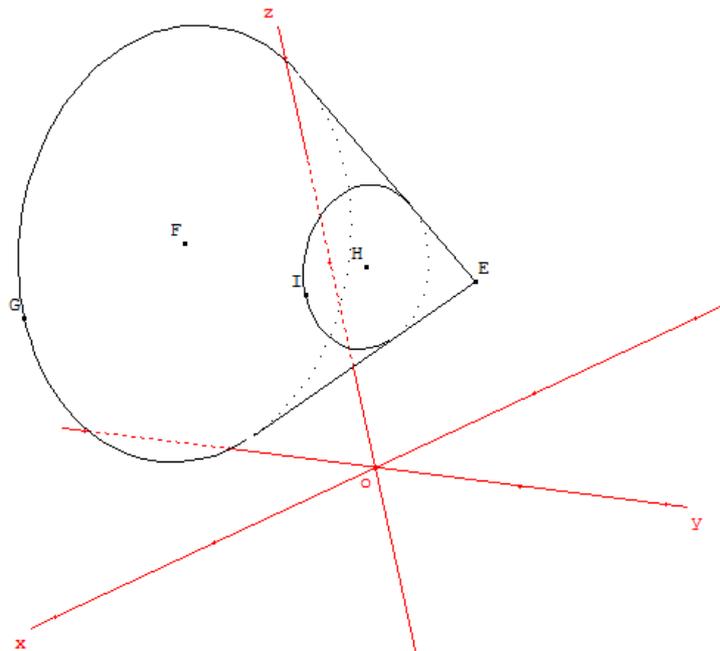
On considère le point mobile $H(0; y; 1)$ où $-1 \leq y \leq 1$.

Le rayon de ce cercle HI est, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EH}{EF} = \frac{EI}{EG} = \frac{HI}{GF}$$

$$\frac{1-y}{2} = \frac{HI}{1}$$

$$HI = \frac{1-y}{2} = 0,5 - 0,5y$$



L'équation du cercle de centre $H(0; y; 1)$ et de rayon HI est :

$$\begin{cases} x^2 + (z - 1)^2 = (0,5 - 0,5y)^2 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

3 Troisième cône

On étudie le cône :

- de sommet $R(-1; 0; 1)$
- de centre de base $S(1; 0; 1)$
- de point de base $T(1; 1; 1)$

On considère le point mobile $U(x; 0; 1)$ où $-1 \leq x \leq 1$.

Le rayon de ce cercle UV est, d'après le théorème de Thalès :

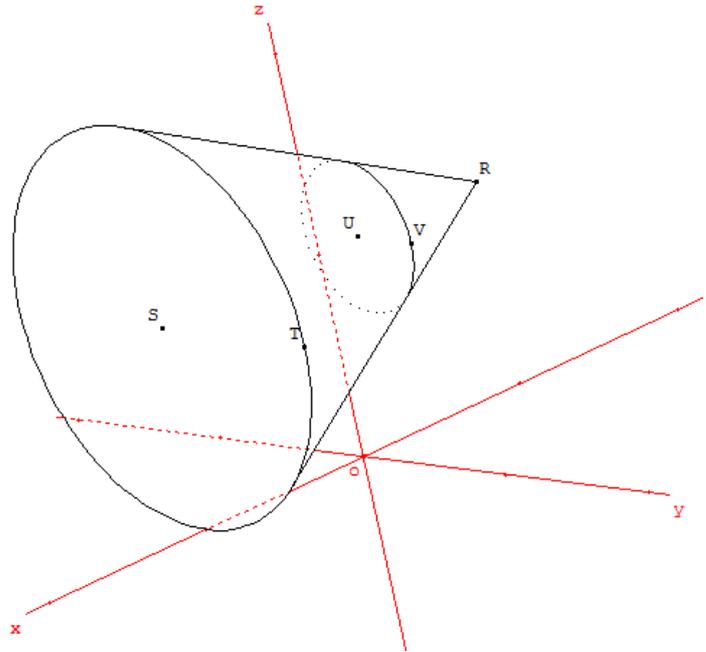
$$\frac{RU}{RS} = \frac{RV}{RT} = \frac{UV}{ST}$$

$$\frac{1+x}{2} = \frac{UV}{1}$$

$$UV = \frac{1+x}{2} = 0,5 + 0,5x$$

L'équation du cercle de centre $U(x; 0; 2,5)$ et de rayon UV est :

$$\begin{cases} y^2 + (z - 1)^2 = (0,5 + 0,5x)^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

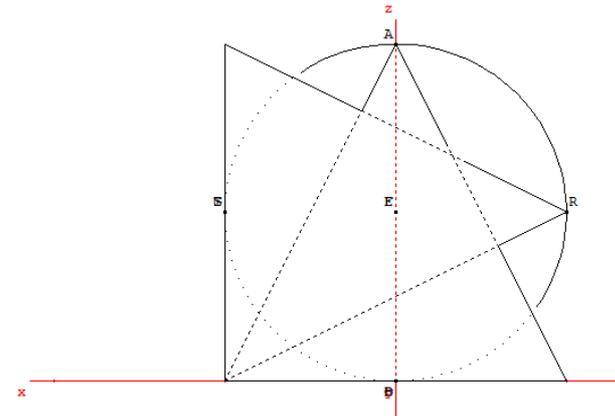
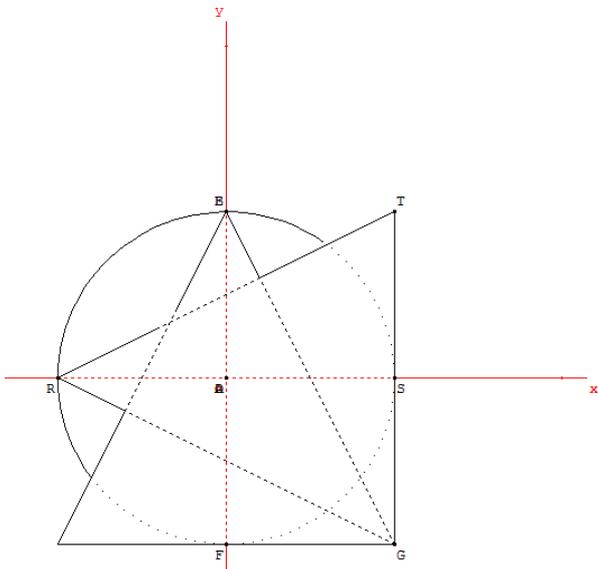
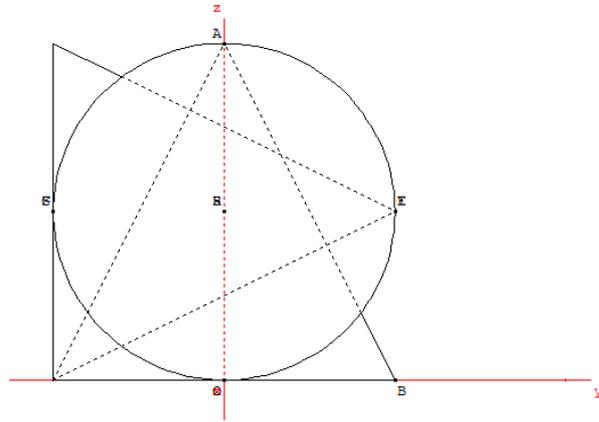
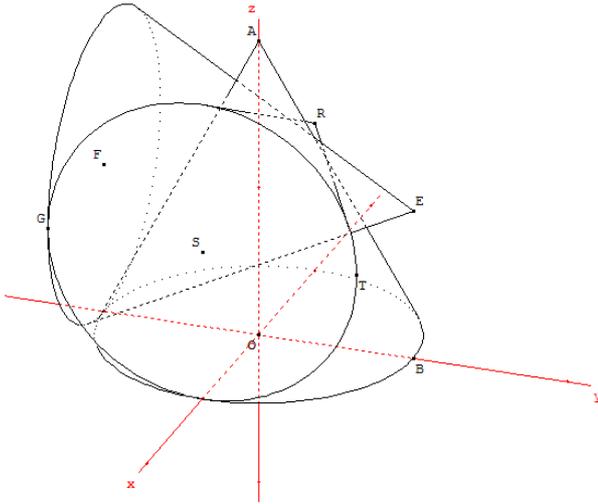


4 Intersection des trois cônes

On résout le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq (1 - 0,5z)^2 & (i) \\ x^2 + (z - 1)^2 \leq (0,5 - 0,5y)^2 & (ii) \\ y^2 + (z - 1)^2 \leq (0,5 + 0,5x)^2 & (iii) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 0,25z^2 + z = 1 & (i) \\ x^2 - 0,25y^2 + 0,5y + z^2 - 2z = -0,75 & (ii) \\ -0,25x^2 - 0,5x + y^2 + z^2 - 2z = -0,75 & (iii) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 0,25z^2 + z = 1 & (i) \\ x^2 - 0,25y^2 + 0,5y + z^2 - 2z = -0,75 & (ii) \\ -0,25x^2 - 0,5x + y^2 + z^2 - 2z = -0,75 & (iii) \end{cases}$$

$$(i) - (ii) \quad x^2 + y^2 - 0,25z^2 + z - x^2 + 0,25y^2 - 0,5y - z^2 + 2z = 1,75$$

$$1,25y^2 - 0,5y - 1,25z^2 + 3z = 1,75$$

$$y^2 - 0,4y - z^2 + 2,4z = 1,4$$

$$(y - 0,2)^2 - 0,04 - (z - 1,2)^2 + 1,44 = 1,4$$

$$(y - 0,2)^2 - (z - 1,2)^2 = 1,4 + 0,04 - 1,44 = 0$$

$$(y - 0,2)^2 = (z - 1,2)^2$$

$$z - 1,2 = y - 0,2 \quad \text{ou} \quad z - 1,2 = -y + 0,2$$

$$z = y + 1 \quad \text{ou} \quad z = -y + 1,4$$

